LE JOURNAL DE PHYSIQUE

ET

LE RADIUM

ÉTUDE GÉNÉRALE DES DISPOSITIFS INTERFÉRENTIELS A DEUX RAYONS

Par ÉMILE DURAND.

Sommaire. — Quoique les conditions d'emploi soient plus variées que pour les systèmes centrés, on montre que la formule des sinus d'Abbe permet de faire une étude générale des dispositifs interférentiels à deux rayons, sans qu'il soit nécessaire d'entrer dans le détail des appareils.

Comme elle établit une relation entre le déplacement de la source et celui de la frange d'interférence, on peut calculer la visibilité en fonction des dimensions de la source.

On établit ensuite les formules générales donnant la position des franges; la méthode se prête bien à l'étude des franges au voisinage des caustiques.

Introduction. — Les dispositifs interférentiels comprennent tous, au moins, une source ponctuelle S et une surface Σ sur laquelle on observe les franges; en un point M de la surface Σ concourent *n* rayons ayant suivis des trajets différents et provenant de la source S (*fig.* 1).

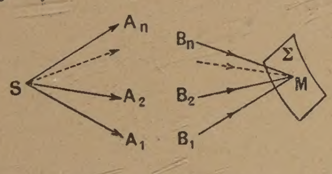


Fig. 1.

La surface Σ est presque toujours un plan (plan d'un viseur, plaque photographique); le nombre des rayons interférents peut être très grand et même infini; nous allons nous borner, dans ce qui suit, à l'étude des dispositifs à deux rayons.

Pour l'étude de ces dispositifs, nous proposons de prendre en considération, d'une manière systématique, l'angle α sous lequel les deux rayons sont émis par la source S et l'angle β sous lequel ils interfèrent en M.

Il s'agit d'une étude élémentaire, car, à la manière de l'optique géométrique, elle ne considère que les rayons lumineux; nous faisons donc abstraction de tous les phénomènes liés à la diffraction qui, parfois, modifient beaucoup l'aspect des franges; enfin, on suppose la lumière rigoureusement monochromatique et l'on ne tient pas compte de son état de polarisation.

I. — Déplacement de la source et déplacement des franges.

Position du problème. — Soient deux rayons issus de S faisant entre eux un angle α et interférant en M sous un angle β (*fig.* 2).

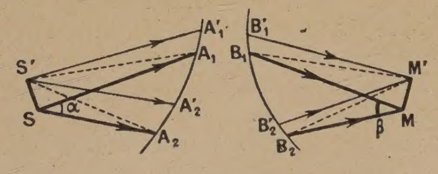


Fig. 2.

A_1 et A_2 sont les points où ces deux rayons pénètrent dans l'instrument, B_1 et B_2 les points par où ils en sortent; désignons par δ la différence de marche des deux rayons :

$$\delta = (SA_2B_2M) - (SA_1B_1M). \qquad (1)$$

Quand S se déplace jusqu'à un point voisin quelconque S′, l'état d'interférence varie au point M;

il existe un point M′ voisin de M où l'état d'interférence lorsque la source est en S′ est le même qu'au point M lorsque la source était en S.

Soient $S'A'_1B'_1M'$ et $S'A'_2B'_2M'$ les nouveaux trajets des deux rayons issus de S′ et venant interférer en M′; on a

$$\delta = (S'A'_2B'_2M') - (S'A'_1B'_1M').$$

Les trajets $S'A'_2B'_2M'$ et $S'A'_1B'M'$ étant des trajets réels suivis par la lumière, si l'on considère les trajets $S'A_2B_2M'$ et $S'A_1B_1M'$ voisins des précédents et ayant mêmes extrémités, les chemins optiques correspondants ne diffèrent des précédents que d'un infiniment petit d'ordre supérieur (avec, comme infiniment petits principaux, $A_1A'_1$, $A_2A'_2$, ..., SS′, MM′). On a donc

$$\delta = (S'A_2B_2M') - (S'A_1B_1M'). \tag{2}$$

En comparant (1) et (2),

$$(SA_2B_2M) - (SA_1B_1M) = (S'A_2B_2M') - (S'A_1B_1M')$$

ou

$$(SA_2) + (A_2B_2) + (B_2M) - (SA_1) - (A_1B_1) - (B_1M)$$
$$= (S'A_2) + (A_2B_2) + (B_2M') - (S'A_1) - (A_1B_1) - (B_1M').$$

En posant

$$(\Delta\delta)_S = [(SA_2) - (SA_1)] - [(S'A_2) - (S'A_1)],$$
$$(\Delta\delta)_M = [(MB_2) - (MB_1)] - [(M'B_2) - (M'B_1)],$$

il vient

$$(\Delta\delta)_S = -(\Delta\delta)_M. \tag{1}$$

La signification de ces deux grandeurs $(\Delta\delta)_S$ et $(\Delta\delta)_M$ est claire :

$(\Delta\delta)_S$ est la variation de la différence de marche δ en M quand la source se déplace jusqu'en S′;

$(\Delta\delta)_M$ est la variation de la différence de marche δ quand on se déplace dans le champ d'interférence de M en M′, la source S restant fixe.

D'après la définition même des couples de points (S, M) d'une part et (S′, M′) d'autre part, on peut dire que *lorsque* S *se déplace de* S *en* S′, *le point* M *de la frange d'interférence qui passe par* M, *se déplace de* M *en* M′.

Nous nous proposons de déterminer les relations qui lient entre eux ces deux déplacements SS′ et MM′ en direction, sens et grandeur.

Définition des déplacements efficaces Δx et Δy. — Prenons comme plans de figures les plans formés par les rayons SA_1 et SA_2 d'une part, MB_1 et MB_2 d'autre part (*fig.* 3); ces plans peuvent être différents.

Soit l'hyperboloïde de foyers A_1 et A_2, lieu des points pour lesquels $SA_1 - SA_2 = \text{const}$; au voisinage de S, on peut le confondre avec son plan tangent et l'on sait que ce dernier est perpendiculaire au plan SA_1A_2; son intersection avec ce dernier plan est la bissectrice SD_S de l'angle $\widehat{A_1SA_2}$.

On va décomposer le déplacement SS′ en trois autres rectangulaires SS_1, SS_2, SS_3; les deux premiers sont dans le plan tangent à l'hyperboloïde : SS_1 dans le prolongement de la bissectrice SD_S; SS_2 normal à cette même bissectrice.

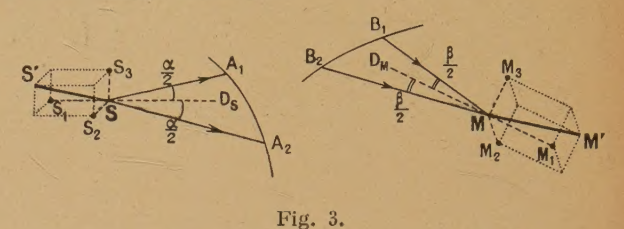


Fig. 3.

SS_3 est donc normal à la bissectrice et dans le plan des deux rayons.

Seul, le déplacement SS_3 que nous désignerons dorénavant par Δx produit une variation $(\Delta\delta)_S$ de la différence de marche δ au point M et produit, par conséquent, un déplacement de la frange d'interférence passant par M.

On peut effectuer la même décomposition pour le déplacement MM′. $(\Delta\delta)_M$ est nul pour les déplacements MM_1 et MM_2 qui sont, dans le plan tangent, à l'hyperboloïde de foyers B_1 et B_2; il en résulte que la surface d'interférence passant par M a son plan tangent confondu avec le plan normal au plan MB_1, MB_2; son intersection avec le plan MB_1B_2 est la bissectrice MD_M de l'angle B_1MB_2.

La frange d'interférence passant par M est l'intersection de cette surface d'interférence avec la surface Σ sur laquelle on observe les franges; si la surface d'observation Σ est un plan normal à la bissectrice MD_M, la frange d'interférence est normale au plan des rayons MB_1 et MB_2.

Dans tous les cas, quelle que soit la surface Σ, le déplacement MM_3 est normal à la frange d'interférence.

En définitive, on peut affirmer que le *déplacement* $\Delta x = SS_3$ *de la source produit un déplacement* $MM_3 = \Delta y$ *normal à la frange d'interférence passant par* M.

Dans ce qui suit, ce sont ces déplacements efficaces Δx et Δy qui seront pris en considération.

Calcul des variations infiniment petites $(d\delta)_S$ et $(d\delta)_M$. — 1. Calcul de $(d\delta)_S$. — A un infiniment petit d'ordre supérieur à $SS' = dx$, on peut confondre les arcs de cercles de centres A_1 et A_2 menés par S′ avec les perpendiculaires $S'H_1$ et $S'H_2$ abaissées sur les droites SA_1 et SA_2; d'où (*fig.* 4),

$$(d\delta)_S = SH_1 + SH_2 = 2\,SH_2 = 2\,dx \sin\frac{\alpha}{2}.$$

Si la source est dans un milieu d'indice n_S,

$$(d\delta)_S = 2 n_S \, dx \sin\frac{\alpha}{2}.$$

2. CALCUL DE $(d\delta)_M$. — Le calcul est analogue au précédent; si β est l'angle sous lequel interfèrent

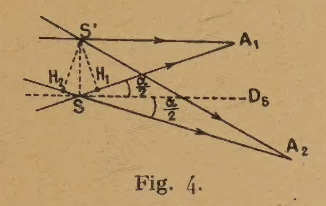


Fig. 4.

les deux rayons et si n_M est l'indice du milieu dans lequel se trouve la surface d'observation, on a

$$(d\delta)_M = 2 n_M \, dy \sin\frac{\beta}{2}.$$

Calcul des variations finies $(\Delta\delta)_S$ et $(\Delta\delta)_M$. — 1. CAS GÉNÉRAL.

$$(\Delta\delta)_S = 2 n_S \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} \sin\frac{\alpha}{2}\, dx,$$

$$(\Delta\delta)_M = 2 n_M \int_{y_0}^{y_0+\Delta y} \sin\frac{\beta}{2}\, dy.$$

Pour intégrer, il faut donc connaître, dans chaque cas particulier, la loi de variation de α en fonction de x, ou de β en fonction de y.

Si les angles α et β sont petits, on peut confondre les sinus avec les angles.

2. CAS OÙ α OU β SONT DES CONSTANTES. — Ces cas où α et β sont rigoureusement ou approximativement constants sont assez fréquents; on a

$$\boxed{(\Delta\delta)_S = 2 n_S \, \Delta x \sin\frac{\alpha}{2},} \qquad (2)$$

$$\boxed{(\Delta\delta)_M = 2 n_M \Delta y \sin\frac{\beta}{2}.} \qquad (3)$$

3. CAS OÙ $x_0 = \alpha_0 = 0$ OU $y_0 = \beta_0 = 0$. — On ne peut plus considérer α (ou β) comme constant; en se limitant au premier terme du développement de x (ou de y) en fonction de α (ou de β), on a

$$x = a\alpha^m, \qquad y = b\beta^m; \qquad (4)$$

$m = 1$ si x (ou y) est du premier ordre par rapport à α (ou β); $m = 2$ si les déplacements sont du second ordre par rapport aux angles, etc.

a et b sont des constantes caractéristiques de l'appareil.

$m = 1$ est le cas usuel; on rencontre $m = 2$ dans l'étude des franges au voisinage des caustiques tangentielles. Comme on est au voisinage des valeurs $\alpha = 0$ (ou $\beta = 0$), on peut confondre le sinus avec l'angle, d'où

$$(\Delta\delta)_S = n_S \int_0^{\Delta x} \alpha \, dx$$
$$= n_S a^{-\frac{1}{m}} \int_0^{\Delta x} x^{\frac{1}{m}} dx$$
$$= n_S \frac{m}{m+1} a^{-\frac{1}{m}} x^{\frac{m+1}{m}} = \frac{m}{m+1} \alpha n_S \Delta x;$$

on obtient une formule analogue pour $(\Delta\delta)_M$; comme

$$\alpha_0 = 0, \qquad \alpha = \alpha - \alpha_0 = \Delta\alpha,$$
$$x_0 = 0, \qquad x = x - x_0 = \Delta x,$$

on a, en définitive,

$$\boxed{(\Delta\delta)_S = \frac{m}{m+1} n_S \Delta\alpha \, \Delta x,} \qquad (5)$$

$$\boxed{(\Delta\delta)_M = \frac{m}{m+1} n_M \Delta\beta \, \Delta y.} \qquad (6)$$

On peut résoudre la dernière égalité par rapport à $\Delta y = y - y_0 = y$; on en tire la formule suivante dont nous ferons usage dans le calcul de l'interfrange :

$$y = \sqrt[m+1]{\left(\frac{m+1}{m}\right)^m b \left(\frac{\Delta\delta}{n_M}\right)^m}. \qquad (7)$$

Déplacement Δy de la frange correspondant au déplacement Δx de la source. — Pour obtenir la relation cherchée entre Δx et Δy, il suffit d'écrire que

$$(\Delta\delta)_S = -(\Delta\delta)_M.$$

Pour que le signe — ait un sens il faut faire des conventions de signes pour les grandeurs Δx, Δy, α, β.

On définira un sens positif sur les directions Δx et Δy en se dirigeant de la bissectrice vers un rayon déterminé (SA_1 par exemple, ou B_1M qui lui correspond dans le dernier milieu).

Les angles α et β seront positifs ou négatifs suivant que la source et la frange sont réelles ou virtuelles.

1. CAS GÉNÉRAL.

$$n_S \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} \sin\frac{\alpha}{2}\, dx = n_M \int_{y_0}^{y_0+\Delta y} \sin\frac{\beta}{2}\, dy;$$

on ne peut expliciter que dans chaque cas particulier.

2. ANGLES α ET β CONSTANTS.

$$\boxed{n_S \Delta x \sin\frac{\alpha}{2} = n_M \Delta y \sin\frac{\beta}{2}.} \qquad (8)$$

On reconnaît la formule des sinus d'Abbe;

posons

$$\gamma = \frac{n_M}{n_S} \frac{\sin \frac{\beta}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}.$$

Si γ est le même en tous les points du champ d'interférence, tout le système de franges se déplace en bloc de la quantité Δy quand la source se déplace de Δx; sinon, il y a déformation des franges au cours du déplacement.

On sait que ce résultat est aussi valable pour les instruments stigmatiques et que la relation $\gamma = \text{const}$ exprime, pour un système de révolution, la condition d'aplanétisme.

Si les angles sont petits, on a

$$n_S \alpha \Delta x = n_M \beta \Delta y.$$

3. Voisinage de $\alpha = \beta = 0$. — Quand m est le même pour α et β, la formule précédente relative aux petits angles est valable ($\alpha = \Delta\alpha$; $\beta = \Delta\beta$).

Remarque. — Il y a des cas où l'un des angles est constant, tandis que l'autre est nul; par exemple, si $\alpha = 0$ et $\beta = \text{const}$, on écrira

$$\frac{m}{m+1} n_S \Delta\alpha \, \Delta x = n_M \Delta y \sin \frac{\beta}{2}.$$

II. — Visibilité et localisation des franges.

Calcul de la visibilité quand α est sensiblement le même pour tous les points de la source. — 1. Cas de deux sources ponctuelles distantes de Δx. — Il s'agit de deux sources, constituées chacune par un grand nombre d'atomes lumineux, et n'ayant aucune relation de phase.

Soit $i(y)$ l'intensité du système de franges dû à la première source, intensité comptée sur la normale à la frange d'interférence passant par M dans le plan des deux rayons; on a

$$i(y) = a_1^2 + a_2^2 + 2 a_1 a_2 \cos 2\pi \frac{\delta(y) - \frac{\Delta\delta}{2}}{\lambda},$$

$\delta(y)$ différence de marche entre les deux rayons issus de S et fonction de l'abscisse y sur la droite My.

L'intensité due à la deuxième source est

$$i'(y) = a_1^2 + a_2^2 + 2 a_1 a_2 \cos 2\pi \frac{\delta(y) + \frac{\Delta\delta}{2}}{\lambda}.$$

On prend donc, pour simplifier, deux sources de même intensité; l'intensité due aux deux sources est

$$I(y) = i + i' = 2[a_1^2 + a_2^2] + 4 a_1 a_2 \cos 2\pi \frac{\Delta\delta}{2\lambda} \cos 2\pi \frac{\delta(y)}{\lambda}.$$

Les maxima de l'intensité correspondent à la valeur $+1$ du dernier cosinus et les minima à la valeur -1; d'où, pour la visibilité V,

$$V = \frac{2 a_1 a_2}{a_1^2 + a_2^2} \cos\left[\pi \frac{\Delta\delta}{\lambda}\right]$$

avec

$$V = \frac{I_M - I_m}{I_M + I_m}.$$

En remplaçant $\Delta\delta$ par sa valeur en fonction de Δx

$$\Delta\delta = 2 n_S \Delta x \sin \frac{\alpha}{2}$$

et en posant

$$u = \pi n_S \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2}}{\lambda} \Delta x,$$

on a

$$\boxed{V = \frac{2 a_1 a_2}{a_1^2 + a_2^2} \cos u.} \qquad (9)$$

On a une variation sinusoïdale de V en fonction de u (ou de Δx); si les deux rayons interférents ont même amplitude ($a_1 = a_2$), les maxima de la visibilité sont égaux à ± 1; quand la visibilité change de signe, cela veut dire que l'on observe des franges brillantes là où l'on observait des franges sombres ou inversement.

La visibilité s'annule quand $u = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi$, soit

$$\Delta x = \frac{2k+1}{2 n_S \sin \frac{\alpha}{2}} \frac{\lambda}{2};$$

si α est petit

$$\Delta x = (2k+1) \frac{\lambda}{2\alpha}.$$

2. Fente unique de largeur Δx. — Soit O le milieu de la fente (*fig.* 5); l'intensité due à la bande

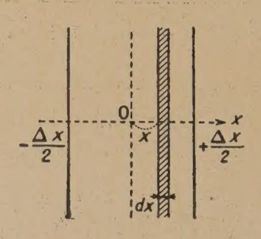


Fig. 5.

de largeur dx située à une distance x de O est, à un coefficient près,

$$dI = \left[a_1^2 + a_2^2 + 2 a_1 a_2 \cos 2\pi \frac{\delta(y) + \Delta\delta}{\lambda}\right] dx;$$

nous supposons, pour simplifier, que la source est une plage de brillance uniforme.

L'intensité due à la fente entière est

$$I=(a_1^2+a_2^2)\int_{-\frac{\Delta x}{2}}^{+\frac{\Delta x}{2}}dx$$

$$+2a_1a_2\int_{-\frac{\Delta x}{2}}^{+\frac{\Delta x}{2}}\cos\left[2\pi\frac{\delta(y)}{\lambda}+2\pi\frac{2x\sin\frac{\alpha}{2}ns}{\lambda}\right]dx,$$

$$I=[a_1^2+a_2^2]\Delta x$$

$$+4a_1a_2\cos 2\pi\frac{\delta(y)}{\lambda}\int_0^{\frac{\Delta x}{2}}\cos\left[2\pi\frac{2ns\sin\frac{\alpha}{2}}{\lambda}x\right]dx$$

$$=[a_1^2+a_2^2]\Delta x+2a_1a_2\frac{\sin\left[\pi ns\Delta x\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}}{\lambda}\right]}{\pi ns\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}}{\lambda}}\cos 2\pi\frac{\delta(y)}{\lambda},$$

d'où l'expression suivante pour la visibilité, u représentant la même quantité que dans le paragraphe précédent :

$$\boxed{V=\frac{2a_1a_2}{a_1^2+a_2^2}\frac{\sin u}{u}.}\qquad(10)$$

Les maxima (ou minima) de la fonction $\frac{\sin u}{u}$ sont donnés dans le tableau ci-dessous ainsi que les valeurs correspondantes de u.

u.....	0	4,493	7,725	10,90	14,06 ...
$\frac{\sin u}{u}$..	1	−0,2172	+0,1284	−0,0913	+0,0709 ...

La visibilité s'annule pour

$$u=k\pi\qquad(k=1,2,3,\ldots),$$

soit encore

$$\Delta x=\frac{k\lambda}{2\sin\frac{\alpha}{2}};$$

si α est petit,

$$\Delta x=\frac{k\lambda}{\alpha}.$$

3. La source est un cercle de diamètre Δx; $R=\frac{\Delta x}{2}$ (*fig.* 6). — Comme dans ce qui précède, nous appelons « source » une surface sur laquelle sont réparties une multitude de sources incohérentes.

La bande hachurée de surface

$$z\,dx=\sqrt{R^2-x^2}\,dx$$

produit une intensité

$$dI=\left[a_1^2+a_2^2+2a_1a_2\cos 2\pi\frac{\delta(y)+2nsx\sin\frac{\alpha}{2}}{\lambda}\right]\times\sqrt{R^2-x^2}\,dx,$$

$$I=(a_1^2+a_2^2)\int_{-R}^{+R}\sqrt{R^2-x^2}\,dx$$

$$+2a_1a_2\int_{-R}^{+R}\sqrt{R^2-x^2}\cos 2\pi\frac{\delta(y)+2nsx\sin\frac{\alpha}{2}}{\lambda}dx$$

$$=\pi R^2(a_1^2+a_2^2)$$

$$+4a_1a_2\cos 2\pi\frac{\delta(y)}{\lambda}\int_0^R\sqrt{R^2-x^2}\cos 2\pi\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}}{\lambda}nsx\,dx$$

$$=\pi R^2(a_1^2+a_2^2)$$

$$+4a_1a_2\cos 2\pi\frac{\delta(y)}{\lambda}R^2\int_0^1\sqrt{1-v^2}\cos uv\,dv$$

$$=\pi R^2\left[(a_1^2+a_2^2)+2a_1a_2\frac{J_1(u)}{u}\cos 2\pi\frac{\delta(y)}{\lambda}\right].$$

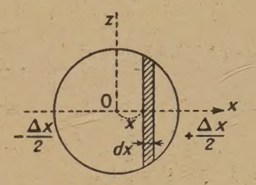


Fig. 6.

On a posé

$$2\pi\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}}{\lambda}nsR=u\qquad\text{et}\qquad x=Rv;$$

on a aussi utilisé la relation

$$\int_0^1\sqrt{1-v^2}\cos uv\,dv=\frac{\pi}{2}\frac{J_1(u)}{u}$$

où $J_1(u)$ est la fonction de Bessel d'ordre 1.

La lettre u représente donc la même expression que dans le paragraphe précédent et l'on a

$$\boxed{V=\frac{2a_1a_2}{a_1^2+a_2^2}\frac{2J_1(u)}{u}.}\qquad(11)$$

Les maxima (ou minima) de la fonction $\frac{2J_1(u)}{u}$ ont lieu pour les valeurs suivantes de u :

u......	1	5,136	8,417	11,620 ...
$\frac{2J_1(u)}{u}$..	0	−0,132	+0,064	−0,040 ...

La visibilité s'annule pour les valeurs suivantes

de u :

$$3{,}832, \quad 7{,}015, \quad 10{,}17, \quad 13{,}32, \quad \ldots$$

La première disparition des franges a lieu pour

$$u = \pi n_S \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2}}{\lambda} \Delta x = 3{,}832,$$

soit

$$\Delta x = 1{,}22 \frac{\lambda}{2 n_S \sin \frac{\alpha}{2}};$$

si α est petit,

$$\Delta x = 1{,}22 \frac{\lambda}{\alpha}.$$

Calcul de la visibilité quand $\alpha = 0$, mais $\Delta\alpha \neq 0$. — $\alpha = 0$ s'entend pour le centre de la source; on a $x = a\alpha^m$. On va faire le calcul de V pour une fente source et dans le cas le plus fréquent où $m = 1$; on a donc

$$x = a\alpha, \qquad \Delta\delta = \frac{1}{2}\alpha x = \frac{1}{2a} x^2,$$

a, constante caractéristique de l'appareil.

$$I = (a_1^2 + a_2^2)\Delta x + 2 a_1 a_2 \int_{-\frac{\Delta x}{2}}^{+\frac{\Delta x}{2}} \cos \left[2\pi \frac{\delta(y) + \frac{1}{2a} x^2}{\lambda} \right] dx$$

en posant

$$u = \sqrt{\frac{2}{\lambda a}}\, x$$

et en introduisant les *intégrales de Fresnel*,

$$G = \int_0^{u_M} \cos \frac{\pi}{2} u^2 \, du, \qquad F = \int_0^{u_M} \sin \frac{\pi}{2} u^2 \, du,$$

$$\begin{aligned} I &= (a_1^2 + a_2^2)\Delta x + 4 a_1 a_2 \frac{1}{2} \sqrt{2\lambda a} \left[G \cos \frac{2\pi}{\lambda} \delta(y) - F \sin \frac{2\pi}{\lambda} \delta(y) \right] \\ &= (a_1^2 + a_2^2)\Delta x + 4 a_1 a_2 \frac{1}{2} \sqrt{2\lambda a} \sqrt{G^2 + F^2} \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda} \delta(y) + \operatorname{arc\,tg} \frac{F}{G} \right]. \end{aligned}$$

Les maxima et les minima de l'intensité dans le plan d'observation correspondent aux valeurs de l'argument qui rendent le cosinus égal à ± 1; d'où, pour la visibilité,

$$V = \frac{2 a_1 a_2}{a_1^2 + a_2^2} \frac{\sqrt{G(u_M)^2 + F(u_M)^2}}{u_M}. \tag{12}$$

Le tableau ci-après donne les valeurs de la fonction $\frac{\sqrt{G^2 + F^2}}{u}$.

Comme G et F tendent vers $\frac{1}{2}$ quand u devient grand, la courbe tend, par une série d'oscillations, vers l'hyperbole équilatère

$$y = \frac{1}{u\sqrt{2}} \qquad (\textit{fig. } 7).$$

u.	$\frac{\sqrt{G^2+F^2}}{u}$.	$\frac{1}{u\sqrt{2}}$.	u.	$\frac{\sqrt{G^2+F^2}}{u}$.	$\frac{1}{u\sqrt{2}}$.
0	1	∞	2,3	0,3633	
0,2	1		2,4	0,3467	
0,4	0,9975		2,5	0,3079	0,2828
0,6	0,9858		2,6	0,2563	
0,8	0,9559		2,7	0,2220	
1	0,8947	0,7071	2,8	0,2177	0,2525
1,1	0,8493		2,9	0,2400	
1,2	0,7908		3	0,2610	
1,3	0,7211	0,5439	3,1	0,2608	0,2281
1,4	0,6405		3,2	0,2358	
1,5	0,5517		3,3	0,1998	
1,6	0,4597	0,4420	3,4	0,1806	0,2080
1,7	0,3750		3,5	0,1929	
1,8	0,3126		3,6	0,2128	
1,9	0,2858	0,3722	3,7	0,2135	0,1911
2	0,2985		3,8	0,1897	
2,1	0,3293		3,9	0,1631	
2,2	0,3557	0,3213	4	0,1631	0,1768

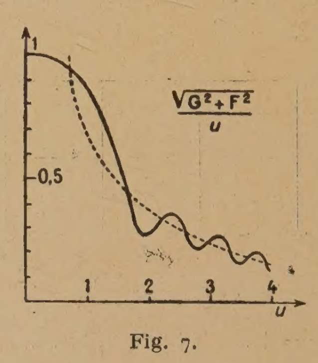


Fig. 7.

On remarquera que les minima ne sont pas nuls comme dans les paragraphes précédents; leur position est donnée approximativement par la relation

$$u = \sqrt{4k - \frac{1}{2}}, \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Calcul de la visibilité quand $\alpha = 0$ et $\Delta\alpha = 0$. — Le déplacement de la source est sans effet sur le déplacement des franges; on a toujours $(\Delta\delta)_S = 0$, d'où

$$V = \frac{2 a_1 a_2}{a_1^2 + a_2^2}. \tag{13}$$

La visibilité ne dépend donc pas de la largeur Δx de la source.

Remarque. — Dans tous les calculs de visibilité, on a supposé que, pour un point donné de la source étendue, α était sensiblement le même pour toute la surface d'observation.

S'il n'en était pas ainsi, les formules précédentes n'auraient plus qu'une valeur locale; pour une largeur donnée Δx de la source, la visibilité subira des fluctuations quand on se déplacera dans le plan d'observation; c'est le cas, par exemple, des franges circulaires à distance finie d'une lame à faces parallèles.

Dimensions de la source permettant l'observation des franges. Localisation des franges. — Ces dimensions se déduisent de l'étude de la visibilité des franges. L'expérience montre que la visibilité limite permettant l'observation est voisine de 0,1; on a alors $\frac{I_m}{I_M} \# \frac{8}{10}$; dans tout ce qui suit, on supposera que $a_1 = a_2$; il n'y aurait d'ailleurs aucune difficulté à tenir compte de la différence d'amplitude des deux rayons. Examinons les trois cas suivants :

A. $\alpha \neq 0$, $\alpha = 0$. — Les courbes $\frac{\sin u}{u}$ et $\frac{2J_1(u)}{u}$ montrent que, lorsque la source s'élargit, on voit réapparaître deux fois (peut-être trois avec $V = 0{,}091$), les franges dans le cas d'une fente source (*); pour le cercle, elles ne réapparaissent qu'une fois (le deuxième maxima est plus petit que 0,1).

Comme règle pratique, les traités classiques admettent que $\Delta\delta$ entre le centre et le bord de la source ne doit pas dépasser $\frac{\lambda}{4}$; soit

$$\Delta x \leq \frac{\lambda}{4 \sin \frac{\alpha}{2}}, \qquad (14)$$

et si α est petit

$$\Delta x \leq \frac{\lambda}{2\alpha};$$

on voit, sur les courbes de visibilité, que cela correspond à $V \# 0{,}6$, ce qui assure une observation confortable; n'oublions pas que Δx représente la largeur de la source, comptée dans la direction de la perpendiculaire à la bissectrice de l'angle formé par les deux rayons émis.

Si l'on veut faire interférer deux rayons émis sous des angles de plus en plus grands, il faut prendre des sources de dimensions Δx de plus en plus petites; P. Sélényi [1] a pu réaliser le cas limite $\alpha = 180°$; la formule (14) montre que l'épaisseur de la source ne doit pas dépasser $\frac{\lambda}{4}$.

(*) **Note ajoutée à la correction des épreuves** : Le contraste doit encore être suffisant pour $V < 0{,}1$ puisque certains auteurs ont observé 7 réapparitions; par exemple : J. K. Robertson, *Nature*, 1917, **99**, p. 424.

B. $\alpha = 0$, $\Delta\alpha \neq 0$. — Les premiers minima de la courbe de visibilité n'atteignent pas 0,1; aussi les franges demeurent visibles malgré de légères fluctuations de V; cherchons pour quelle valeur de u_M on a $V = 0{,}1$; nous prendrons

$$V \# \frac{1}{u\sqrt{2}}, \qquad \text{d'où } u \# 7{,}1;$$

il vient

$$\Delta x \leq 7{,}1\sqrt{2\lambda a}.$$

On peut déterminer aussi la valeur de Δx qui donne $V = 0{,}6$ comme précédemment; la courbe de visibilité (*fig.* 7) donne

$$u_M \# \frac{3}{2}, \qquad \text{d'où } \Delta x \leq \frac{3}{2}\sqrt{2\lambda a},$$

Cela correspond à une différence de marche entre le centre et le bord de la fente source de

$$\Delta\delta = \frac{1}{2a}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)^2 = \frac{9}{16}\lambda \# \frac{\lambda}{2},$$

on a donc, en arrondissant,

$$\Delta x \leq \frac{2\lambda}{\Delta\alpha},$$

$\Delta\alpha$ est une quantité très petite, Δx est donc grand et l'on peut observer les franges avec une source assez étendue; mais ce n'est que pour certains points M que l'on a $\alpha = 0$. On n'observera donc les franges que si la surface Σ coïncide avec la surface lieu des points où se coupent deux rayons provenant d'un même rayon incident [2] [3].

On dit que ces franges sont localisées; on peut les observer, par exemple, avec une lame prismatique.

C. $\alpha = 0$, $\Delta\alpha = 0$. — Les dimensions de la source peuvent être quelconques et l'on obtient encore des franges localisées; telles sont les franges de Haidinger observées au foyer d'une lentille.

Remarque. — Si l'on a calculé l'interfrange ε en tout point du champ d'interférence, on peut évaluer rapidement la dimension maximum à donner à la source; d'après ce qui précède, on peut admettre un déplacement d'une demi-frange quand le point passe d'un bord à l'autre de la source; d'où

$$\Delta y \leq \frac{\varepsilon}{2};$$

la relation des sinus donne

$$n_M \, \Delta y \sin\frac{\beta}{2} = n_S \, \Delta x \sin\frac{\alpha}{2}$$

et souvent le rapport $\gamma = \dfrac{n_M \sin\frac{\beta}{2}}{n_S \sin\frac{\alpha}{2}}$ est constant et

facile à évaluer; on a alors

$$\Delta x \leq \gamma \frac{\varepsilon}{2}.$$

III. — Position des franges.

A. **L'angle β est constant.** — On a

$$(\Delta\delta)_M = 2 n_M \Delta y \sin\frac{\beta}{2},$$

l'interfrange ε, qui est constant, s'obtient en faisant $(\Delta\delta)_M = \lambda$, il vient

$$\varepsilon = \frac{\lambda}{2 n_M \sin\frac{\beta}{2}}, \qquad (15)$$

et si β est petit,

$$\varepsilon = \frac{\lambda}{n_M \beta}.$$

Voici deux cas où la condition β = const se trouve réalisée :

1. Deux faisceaux coniques divergents (ou convergents) de sommets S_1 et S_2. — On observe,

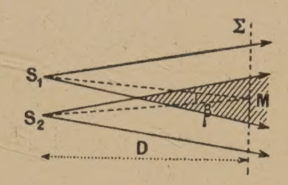


Fig. 8.

dans la direction perpendiculaire à $S_1 S_2$ (*fig.* 8), si $S_1 S_2 \ll D$, on a $\beta \neq$ const et

$$\varepsilon = \frac{\lambda}{\beta} = \frac{\lambda D}{S_1 S_2}.$$

Exemples : trous d'Young, miroirs de Fresnel, etc.

2. Deux faisceaux parallèles. — β est rigoureusement constant (*fig.* 9), les surfaces d'interférence sont des plans parallèles à la bissectrice des deux directions.

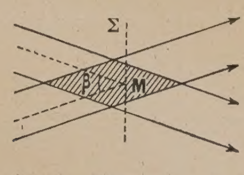


Fig. 9.

Exemples : Exp. de Wiener : β = 180°, $\varepsilon = \frac{\lambda}{2}$; biprisme, miroirs de Lloyd, etc. (quand la source est au foyer d'une lentille.)

B. **L'angle β s'annule avec y; $y = b\beta^m$.** — La position des maxima correspond à $\delta = k\lambda$; il suffit de porter cette valeur dans la formule (7) où $\Delta\delta = \delta - \delta_0$ pour obtenir

$$y_k = \sqrt[m]{\left(\frac{m+1}{m}\right)^m b \left(\frac{k\lambda - \delta_0}{n_M}\right)^m}. \qquad (16)$$

Rappelons que b est une constante caractéristique du dispositif; étudions successivement les cas $m = 1$ et $m = 2$.

1. Deux faisceaux coniques coaxiaux : $m = 1$ (*fig.* 10). — On peut observer avant, entre, ou après

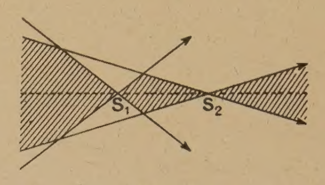


Fig. 10.

les deux sommets S_1 et S_2. Tel est, par exemple, le dispositif de Fabry [4]; les anneaux avant et après les sources sont à centre blanc, mais entre les sources ils sont à centre noir; on a

$$y_k = \sqrt{\frac{2}{n_M} b (k\lambda - \delta_0)},$$

calculons b pour quelques cas particuliers.

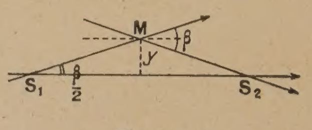


Fig. 11.

a. Observation entre les deux sources (*fig.* 11). — On suppose, pour simplifier, qu'on observe, dans le plan normal à l'axe et passant par le milieu O de $S_1 S_2$; β est supposé petit.

$$y = \frac{\beta}{2} \frac{S_1 S_2}{2}, \qquad \text{donc ici } b = \frac{S_1 S_2}{4}.$$

Exemple : Exp. de Meslin $\left(\delta_0 = -\frac{\lambda}{2}\right)$.

b. Observation en dehors des sources, avec β petit et $OM_0 > S_1 S_2$ (*fig.* 12). — Posons $OM_0 = D$;

on a

$$\frac{S_1S_2}{\beta} \neq \frac{D}{\gamma} \quad \text{et} \quad y = \gamma D,$$

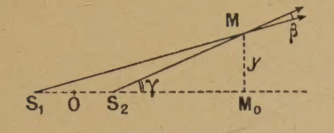


Fig. 12.

d'où

$$y = \frac{D^2}{S_1S_2}\beta,$$

on a donc

$$b = \frac{D^2}{S_1S_2}.$$

Exemple : lame à faces parallèles.

c. *Faisceau parallèle et faisceau conique* (*fig.* 13). —

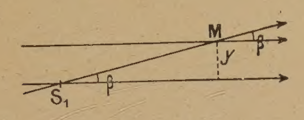


Fig. 13.

Posons $S_1M_0 = D$; on a

$$y = \beta D, \quad \text{donc ici } b = D.$$

Exemple : expérience de Meslin quand la source est au foyer d'une des demi-lentilles.

2. Franges au voisinage des caustiques : $m=2$. — Soient ρ le rayon de courbure et C le centre de courbure de la trace de la caustique T_1TT_2 (*fig.* 14).

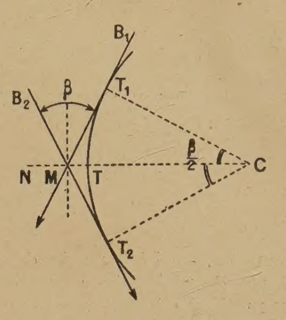


Fig. 14.

On va confondre la courbe T_1TT_2 avec la circonférence de rayon ρ et de centre C; on a MT $= y$.

$$\cos\frac{\beta}{2} = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 = \frac{\rho}{\rho + y} \neq 1 - \frac{y}{\rho},$$

d'où

$$y = \frac{\rho}{8}\beta^2, \quad \text{donc, on a ici } b = \frac{\rho}{8}.$$

Comme l'un des rayons a passé par la caustique en T_1, il a pris sur l'autre une avance de $\frac{\lambda}{4}$; d'où, pour la position des maxima,

$$y_k = \sqrt[3]{\left(\frac{3}{2}\right)^2 \frac{\rho}{8}\left(k + \frac{1}{4}\right)^2 \lambda^2} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

c'est la formule classique [5].

Manuscrit reçu le 1er septembre 1945.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] P. Selenyi, Wide angle interferences and nature of elementary light source. *Phys. Rev.*, 1939, **56**, p. 477-479.
[2] Ch. Fabry, Théorie de la visibilité et de l'orientation des franges d'interférence. *J. de Physique*, 1892, 3e série, t. **1**.
[3] C. Raveau, Visibilité et singularités des franges d'interférence. *Comptes rendus des Séances de la Société française de physique*, 1901, p. 40*.
[4] Ch. Fabry, *J. de Physique*, janvier 1893, 3e série, t. **2**.
[5] Bouasse et Carrière, Diffraction, p. 433 (Delagrave, édit.; Paris, 1923).

OPTIQUE IONIQUE DE DEUX GÉNÉRATEURS DE NEUTRONS

Par R. DUCHON.

Laboratoire de Synthèse Atomique d'Ivry.

Sommaire. — L'étude de deux tubes producteurs de neutrons, l'un déjà en service à Ivry, l'autre en cours de réalisation, a posé deux problèmes d'optique ionique. Ces problèmes ont été traités par deux méthodes basées sur l'emploi de la carte des potentiels tracée à la cuve électrolytique.

L'une d'elles exigeant la détermination théorique préalable d'une surface équipotentielle, celle-ci a été obtenue par la méthode approchée dite « des anneaux ».

Introduction. — La construction d'un tube à neutrons pour la transmutation des noyaux atomiques pose certains problèmes d'optique ionique.

La précision cherchée est, naturellement, inférieure à celle qu'on exige dans le cas du microscope électronique; mais elle justifie une étude préliminaire assez longue et délicate.

Il faut connaître, en particulier, le trajet des ions dans leur source même, afin d'obtenir un faisceau de forme et de densité favorables, et dans les lentilles qui leur communiquent les grandes accélérations requises pour la production des neutrons.

Un tube est actuellement en service à Ivry; un autre est en voie de réalisation.

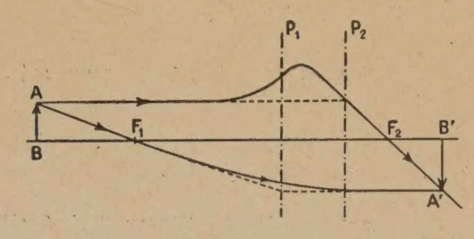


Fig. 1.

Chacun comprend deux étages d'accélération de 300 kV (lentilles électrostatiques formées de deux cylindres coaxiaux de même rayon, bordés de deux tores en regard).

La première lentille agissant sur des particules électrisées de faible vitesse, assume, à elle seule, presque tout le rôle focalisateur de l'ensemble. La seconde lentille, recevant un faisceau déjà considérablement accéléré, n'agit presque pas sur la direction des ions qui la traversent.

On sait qu'un pareil système de deux cylindres coaxiaux se comporte vis-à-vis d'un rayon corpusculaire comme une lentille optique épaisse vis-à-vis d'un rayon lumineux.

On retrouve, en particulier, les mêmes éléments caractéristiques : foyer-objet, foyer-image et plans principaux correspondants. Tout rayon coupant l'axe au foyer-objet F_1 ressort parallèlement à l'axe. L'incident et l'émergent correspondant prolongés se coupent sur le plan principal-objet P_1.

Tout rayon parallèle à l'axe sort en passant par le foyer-image F_2, et son prolongement coupe l'émergent sur le plan principal-image P_2 (*fig.* 1).

Ces éléments peuvent être déterminés en relevant la distribution du potentiel entre les deux cylindres par la méthode rhéographique de MM. Pérès et Malavard [1]. On en déduit ensuite la marche d'un ion à partir d'une position et d'une vitesse initiales données.

Nous avons appliqué cette méthode à l'étude de la source d'ions du tube déjà en service, lequel sera désigné par (S), et à celle des lentilles des tubes en construction, que nous désignerons par (C).

Nous ne décrirons pas la méthode rhéographique, ni la manière de tracer les équipotentielles.

Par contre, nous allons donner un aperçu des principes et de la méthode pratique permettant de passer de la carte du potentiel à la trajectoire d'un ion dans une lentille électrostatique.

Nous empruntons le fonds de cette méthode à un article de M. Grivet [2].

Étude générale d'une lentille électrostatique. — L'analyse qui suit s'applique au cas de l'approximation de Gauss.

On démontre qu'un système de révolution ne peut focaliser les rayons corpusculaires que si son potentiel varie en raison inverse de la distance r à l'axe.

L'équation caractéristique du potentiel en coordonnées cylindriques

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0$$

exprime que le vecteur champ correspondant est sans divergence.

En écrivant en particulier que son flux est nul à travers une surface cylindrique fermée élémentaire, coaxiale avec le système considéré, on obtient la relation suivante entre les composantes E_r et E_z du vecteur champ :

$$E_r = -\frac{r}{2}\frac{\partial E_z}{\partial z}. \qquad (1)$$

Le champ est déterminé en tout point quand il est connu sur l'axe.

Pour obtenir les équations du mouvement d'une particule, nous prenons comme origine des potentiels la surface de la source, d'où les ions, de charge e et de masse m, sortent avec une vitesse initiale considérée comme négligeable.

La vitesse d'un ion qui franchit l'équipotentielle correspondant au potentiel U est

$$v = \sqrt{\frac{2e}{m}U}.$$

En outre, on a, par définition,

$$E_r = -\frac{\partial U}{\partial r}, \qquad E_z = -\frac{\partial U}{\partial z}.$$

En désignant par $V(z)$, V' et V'' le potentiel le long de l'axe ($r = 0$) et ses dérivées première et seconde par rapport à la variable unique z, nous écrirons, en utilisant la relation (1) :

$$E_r = \frac{1}{2}rV'', \qquad E_z = -V'.$$

Le mouvement et la trajectoire d'un ion qui demeure dans le plan méridien sont déterminés par les équations classiques

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{e}{2}rV'', \qquad \frac{m}{2}\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = -eV.$$

(Les vitesses sont assez faibles pour qu'on puisse négliger les corrections de relativité.)

On en tire l'équation différentielle :

$$\sqrt{V}\frac{d}{dz}\left(\sqrt{V}\frac{dr}{dz}\right) = -\frac{1}{4}rV''. \qquad (2)$$

Nous cherchons à déterminer la trajectoire d'un ion, c'est-à-dire qu'il nous faut une relation entre r et z.

Il existe, entre autres, un moyen approché donnant d'assez bons résultats, qu'on désigne par *méthode du polygone inscrit*.

Méthode du polygone inscrit. — On commence par relever, sur la carte expérimentale des potentiels, la courbe $V(z)$ de la valeur du potentiel sur l'axe en fonction de l'abscisse z.

Pour le calcul, on substitue, à cette courbe, un polygone inscrit d'un nombre quelconque de côtés. Cela revient à découper l'axe en segments assez petits pour que, dans chacun d'eux, le potentiel puisse être regardé comme linéaire (champ uniforme).

On a alors

$$V'' = 0, \qquad V' = \text{const.}$$

L'équation (2) s'intègre en donnant

$$\sqrt{V}\frac{dr}{dz} = C. \qquad (3)$$

D'autre part, en passant d'un côté au suivant, la valeur de $\frac{dr}{dz}$ subit une discontinuité. Pour la déterminer, il faut considérer la dérivée seconde au voisinage du sommet correspondant.

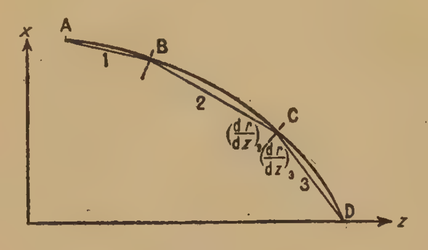


Fig. 2.

Sur un petit espace entourant ce sommet, la variation de V est lente par rapport à celle de V''. En considérant alors V comme constant, l'intégration de (2) donne

$$\sqrt{V}\left(\sqrt{V}\frac{dr}{dz}\right) = -\frac{1}{4}rV', \qquad \frac{dr}{dz} = -\frac{r}{4}\frac{V'}{V}. \qquad (4)$$

On applique la relation (3) aux côtés successifs du polygone, les éléments qui y figurent pour chacun d'eux étant reliés à ceux du côté précédent par la relation (4).

Envisageons une particule provenant du côté (1) et passant au sommet B (*fig.* 2). L'intégration de l'équation (3) permet d'écrire

$$r_B - r_A = \frac{2C_1}{V'_1}(\sqrt{V_B} - \sqrt{V_A}),$$

les indices représentant par des lettres les sommets, par des nombres les côtés auxquels ils se rapportent.

En outre,

$$C_1 = \left(\frac{dr}{dz}\right)_{A_1} V_A, \qquad \left(\frac{dr}{dz}\right)_{A_1} = -\frac{r_A}{4V_A}V'_1,$$

en supposant la particule incidente animée à la distance initiale r_A d'une vitesse $\left(\frac{dr}{dz}\right)_{A_0}$ négligeable.

En arrivant en C, les nouveaux éléments de la

trajectoire seront

$$r_C = r_B + \frac{2C_2}{V'_2}(\sqrt{V_C} - \sqrt{V_B}), \qquad C_2 = \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}z}\right)_{B_2} V_B.$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}z}\right)_{B_2} = \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}z}\right)_{B_1} - \frac{r_B}{4V_B}(V'_2 - V'_1), \qquad \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}z}\right)_{B_1} = \frac{C_1}{V_B}.$$

On peut donc suivre la distance à l'axe de la particule de sommet en sommet, et substituer, à sa trajectoire vraie, des arcs de paraboles (champ uniforme) qu'on remplace par des segments de droites joignant les points correspondant aux sommets successifs.

Application aux lentilles d'accélération. — La détermination de la carte du potentiel par la cuve électrolytique exige la construction d'une maquette, le plus souvent agrandie, des électrodes que l'on étudie.

Nous avons établi, au laboratoire, de ces maquettes. Il fallait les limiter sans que la suppression de certaines parties du modèle amène de perturbations dans la répartition du potentiel.

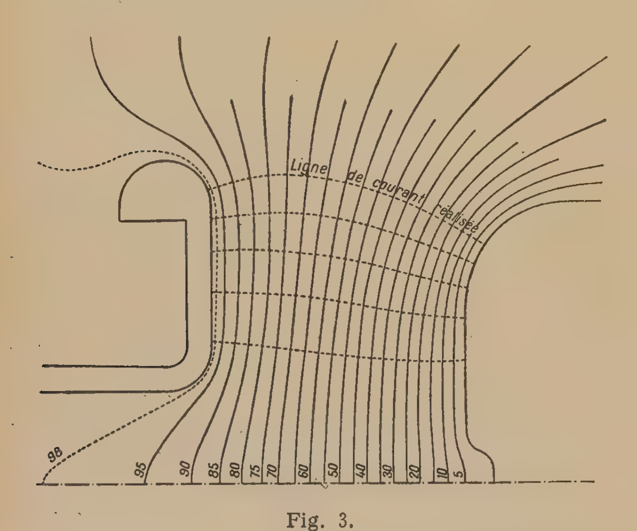


Fig. 3.

On a donc construit une première maquette complète à petite échelle. On en a tiré le dessin d'une ligne de courant qui, agrandie et réalisée en matière isolante (bois verni) a servi de frontière à un modèle agrandi, destiné à préciser les équipotentielles au voisinage du diaphragme.

La figure 3 montre la disposition des surfaces équipotentielles et la ligne de courant qu'on en déduit.

On en tire les éléments figurant dans le tableau numérique ci-après qui permet de déterminer la trajectoire d'un ion, montrant la façon pratique de disposer les calculs.

Pour la première lentille, le potentiel du premier cylindre est zéro, celui du second 100; la vitesse initiale de la particule est sensiblement nulle.

Pour la seconde lentille, le potentiel du premier cylindre est 100, celui du second cylindre 200. La vitesse initiale de la particule résulte du calcul effectué pour la première lentille.

Le tracé de rayons convenables permet de déterminer les plans principaux et les foyers.

Nous avons appliqué cette méthode au premier étage d'accélération des tubes (S) et (C).

Pour le tube (C), un modèle à échelle relativement réduite étant suffisant, il n'y a pas eu lieu de limiter la maquette par une ligne de courant. Le Tableau II donne les éléments des premières lentilles d'accélération en fonction de l'écartement des électrodes.

La seconde lentille de chacun de ces tubes n'ayant pas d'action focalisante sensible sur le faisceau, nous n'en donnons pas les éléments.

Prédétermination théorique d'une surface équipotentielle. — Dans le cas de la source d'ions, le problème posé était l'étude du champ au voisinage du diaphragme canalisant les ions, ce qui

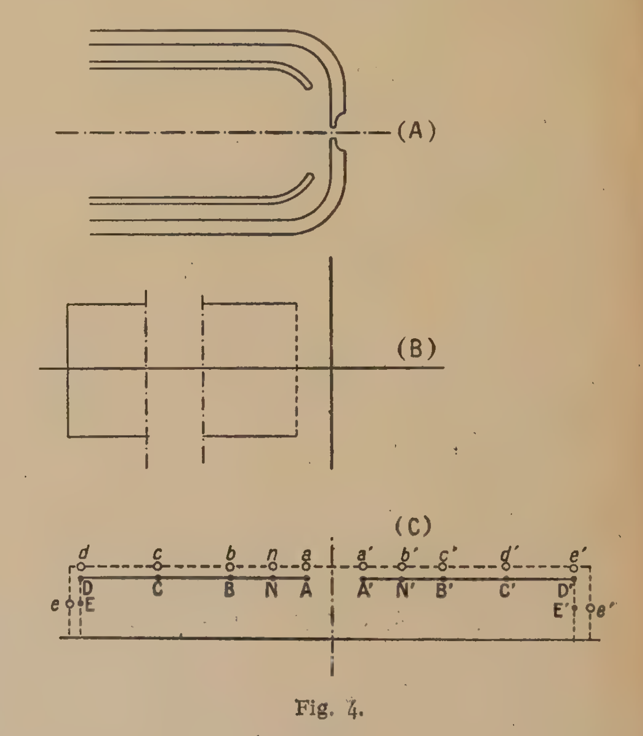


Fig. 4.

exigeait un agrandissement de dix diamètres. Mais la longueur du modèle agrandi aurait dépassé de beaucoup celle de la cuve électrolytique.

Il fallait donc, là encore, limiter le modèle, mais dans le sens de l'axe, en supprimant une portion de conducteur.

Nous avons alors déterminé, *a priori*, par la méthode dite « des anneaux » [3] une équipotentielle (approchée) du système, à laquelle le modèle a été

TABLEAU I.

Côté.	Sommet.	z (mm).	V (%).	$\sqrt{V}$.	$\sqrt{V_Q} - \sqrt{V_P}$.	V'_n (%/mm).	$V'_{n+1} - V'_n$.	ANGLE INITIAL. Rayon direct. $\alpha = 0$. $\frac{dr}{dz}$.	$\alpha = 0$. r (mm).	$\alpha = 14°$. $\frac{dr}{dz}$.	$\alpha = 14°$. r (mm).	$\alpha = -14°$. $\frac{dr}{dz}$.	$\alpha = -14°$. r (mm).	Rayon rétrograde. $\alpha = 180°$. $\frac{dr}{dz}$.	$\alpha = 180°$. r (mm).
0															
	A.......	—237	1,33	1,15			0,0213	0,00 / -0,080	20	0,250 / 0,170	20	-0,250 / -0,330	20	0,127 / 0,151	6,02
1					0,37	0,0213									
	B.......	—280	2,33	1,52			0,0287	-0,0605 / -0,112	16,8	0,128 / 0,046	26,8	-0,250 / -0,271	6,8	0,115 / 0,152	12,07
2					0,79	0,0500									
	C.......	—220	5,33	2,31			0,061	-0,0735 / -0,106	11,4	0,030 / -0,056	30,0	-0,178 / -0,170	— 6,2	0,100 / 0,0454	19,37
3					0,89	0,111									
	D.......	—175	10	3,20			0,071	-0,0766 / -0,0899	7,5	-0,040 / -0,090	28,0	-0,122 / -0,100	—12,5	0,0321 / -0,0053	21,05
4					1,30	0,182									
	E.......	—120	20	4,50			0,068	-0,064 / -0,067	3,4	-0,064 / -0,084	23,9	-0,071 / -0,0565	—17,1	0,0022 / -0,0169	22,46
5					2,67	0,250									
	F.......	0	50	7,17			0,00	-0,0421 / -0,0421	—3,0	-0,054 / -0,054	15,8	-0,0354 / -0,0354	—22,5	-0,0106 / -0,0106	20,84
6					1,77	0,250									
	G.......	120	80	8,94			—0,068	-0,036 / -0,037	—7,55	-0,054 / -0,052	9,0	——	—26,1	-0,0085 / -0,00417	20,23
7					0,55	0,182									
	H.......	175	90	9,49			—0,071	——	—9,55	-0,049 / -0,048	6,2	——		-0,00394 / +0,0000	20,00
8					0,26	0,111									
	I.......	220	95	9,75			—0,061				4,1				

TABLEAU II.

	Écartement des électrodes (mm).	Plan principal. Image.	Plan principal. Objet.	Foyer principal. Image.	Foyer principal. Objet.	Distance focale. Image.	Distance focale. Objet.
Tube (C).....	300	250	71	20	124	—185	52
	150	196	55	7	78	—190	23
» (S).....	100	10	-	23	–	-	–

Remarque. — Le système (S) se comporte non comme une véritable lentille, mais comme un dioptre sphérique.

limité ensuite. On peut s'attendre à ce que les faibles erreurs résultant de cette substitution d'une équipotentielle approchée à l'électrode réelle soit sans influence sur la distribution du champ au voisinage du canal de sortie des ions.

La figure 4 *a* montre la partie de la source d'ions, voisine de l'orifice de sortie des ions, qu'il s'agit d'étudier.

Pour tracer les surfaces équipotentielles, définies par leur méridien, nous assimilerons le système à l'ensemble d'un cylindre de révolution, fermé par un fond plat, et d'un plan indéfini perpendiculaire à son axe (*fig.* 4 *b*).

Pour éclairer le maniement de la méthode des anneaux, nous allons donner, en détail, le calcul numérique conduisant au tracé des méridiennes d'équipotentielles.

Nous allons substituer, à la surface de notre cylindre L, des anneaux situés sur une surface cylindrique L_1, de rayon un peu supérieur (et arbitraire), et dont les charges seront déterminées pour créer en un certain nombre de points choisis sur le cylindre L des potentiels égaux entre eux (*fig.* 4 c).

Premier stade : détermination de la charge de chaque anneau. — Nous rappelons que, si l'on désigne par R le rayon d'un anneau mince, z la cote par rapport au plan de l'anneau, et r la distance à son axe d'un point de l'espace, on peut exprimer simplement le potentiel U créé par la charge s, uniformément répartie sur cet anneau, au point (r, z).

Prenons comme variables

$$\rho = \frac{r}{R} \quad \text{et} \quad \zeta = \frac{z}{R}.$$

En désignant par $F(u)$ l'intégrale elliptique complète de première espèce de module u, nous avons

$$U = \frac{2s}{\sqrt{\rho}} u F(u) \tag{5}$$

avec

$$u^2 = \frac{4\rho}{(1+\rho)^2 + \zeta^2}. \tag{6}$$

Les données, dans le cas particulier qui nous occupe, étaient les suivantes :

Dimensions du cylindre L :

Longueur l (mm)	180
Rayon r (mm)	47
Distance au plan d (mm)	52

Nous choisissons pour rayon arbitraire [1] de L_1, $R = 52$ mm de sorte que les dimensions précédentes, rapportées à R, deviennent

Longueur λ	3,45
Rayon ρ	0,90
Distance au plan δ	0,45

Les anneaux seront pris au nombre de 5, et situés aux cotes suivantes sur le cylindre L_1 :

0,45 ; 1,00 ; 1,60 ; 2,75 ; 3,90.

Le fond sera représenté par un anneau de rayon arbitraire, mais de l'ordre de $\frac{R}{2}$. Nous prendrons, pour valeur de ce rayon,

$$R_2 = 0{,}23,$$

de telle sorte que $\rho_2 = 1$.

[1] Les valeurs des longueurs L_1, R_2, etc. dont les ordres de grandeur sont évidents *a priori*, sont choisies de façon à donner des nombres simples.

Pour éviter des discontinuités dans la fonction $F(u)$, cet anneau sera placé à une certaine distance d_2 du fond du cylindre.

Avec $d_2 = 2{,}6$ mm, on obtient

$$\frac{d_2}{R_2} = 0{,}10.$$

Les six anneaux seront désignés par les lettres minuscules a, b, c, d, e, f, et leurs charges par s_a, s_b, s_c, s_d, s_e, s_f.

L'image électrique de chacun d'eux par rapport au plan est désignée par la même lettre accentuée, et sa charge par le même symbole précédé du signe —.

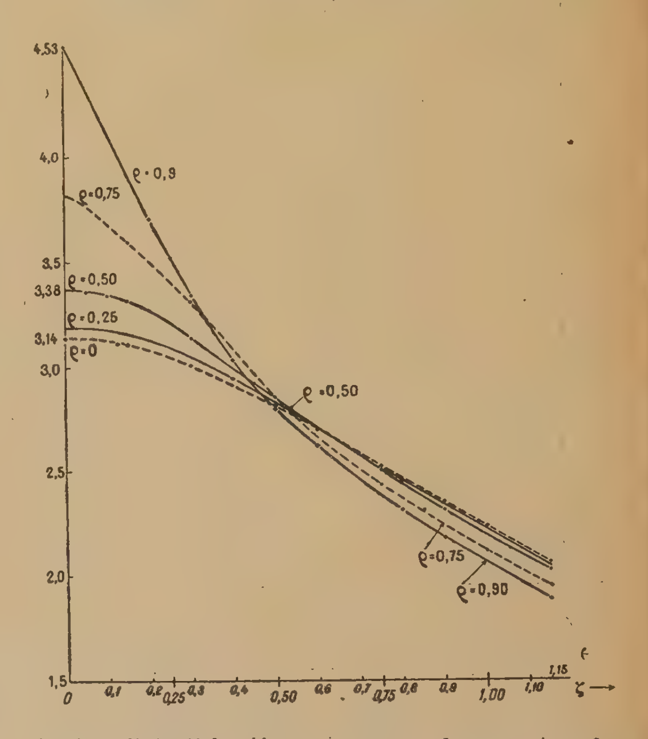


Fig. 5. — Potentiel créé par un anneau de rayon 1 en fonction de la distance à son plan (ζ) pour différentes distances à l'axe (ρ).

Pour simplifier les calculs au maximum, nous avons d'abord tracé le réseau de courbes (*fig.* 5) représentant la variation de U en fonction de ρ pour les valeurs suivantes de ρ (avec $s = 1$) :

0 ; 0,25 ; 0,50 ; 0,75 ; 0,90.

Comme nous ne cherchons pas une précision supérieure à 1 pour 100, de telles courbes, tracées par portions sur plusieurs feuilles de papier millimétrique ordinaire, présentent une grande commodité pour le calcul.

Nous déterminerons les s_i de façon que le potentiel soit le même aux six points A, B, C, D, E, F situés sur le cylindre de rayon 0,90 dans les plans des

anneaux *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f* et sur le cylindre de rayon 0,50 pour F, en prenant *R* pour unité.

Le potentiel créé par un anneau au point (*r*, *z*) de l'espace dépendant du rayon de cet anneau par l'intermédiaire des variables ρ et ζ, il ne faut pas l'oublier lorsque les anneaux envisagés ne sont pas tous de même rayon.

Ceci posé, nous dresserons le tableau des distances des anneaux et de leurs images à chacun d'entre eux, avec, en regard, le potentiel correspondant, affecté du signe convenable. Pour A, par exemple :

TABLEAU III.

Point potentiant.	Distance à A.	Rayon.	Potentiel *U*.
A........	0	0,90	$4{,}53 s_a$
B........	0,55	0,90	$2{,}70 s_b$
C........	1,15	0,90	$1{,}88 s_c$
D........	2,30	0,90	$1{,}19 s_d$
E........	3,45	0,90	$0{,}84 s_e$
F........	6,90	2,00	$0{,}84 s_f$
A'.......	0,90	0,90	$-2{,}18 s_a$
B'.......	1,45	0,90	$-1{,}65 s_b$
C'.......	2,05	0,90	$-1{,}30 s_c$
D'.......	3,20	0,90	$-0{,}90 s_d$
E'.......	4,35	0,90	$-0{,}69 s_e$
F'.......	8,70	2,00	$-0{,}07 s_f$

Le potentiel total produit au point A par l'ensemble de tous les anneaux sera

$$U = 2{,}35 s_a + 1{,}05 s_b + 0{,}58 s_c + 0{,}29 s_d + 0{,}15 s_e + 0{,}07 s_f.$$

En procédant de même successivement pour tous les points B, C, D, E, F et en écrivant que le potentiel en ces points est égal à 1, on obtient le système linéaire suivant :

$$\begin{aligned}
235 s_a + 105 s_b + 58 s_c + 29 s_d + 15 s_e + 7 s_f &= 100,\\
105 s_a + 321 s_b + 154 s_c + 66 s_d + 36 s_e + 15 s_f &= 100,\\
58 s_a + 154 s_b + 363 s_c + 120 s_d + 68 s_e + 35 s_f &= 100,\\
29 s_a + 68 s_b + 119 s_c + 397 s_d + 146 s_e + 78 s_f &= 100,\\
15 s_a + 36 s_b + 62 s_c + 146 s_d + 415 s_e + 150 s_f &= 100,\\
15 s_a + 45 s_b + 67 s_c + 157 s_d + 295 s_e + 424 s_f &= 100.
\end{aligned}$$

La résolution d'un tel système est aisée, mais fastidieuse.

Pour être précise, elle exigerait que chaque opération soit faite avec une grande exactitude. Aussi opère-t-on plus rapidement en pratique en faisant une résolution approchée du système et en ajustant ensuite les coefficients s_i par tâtonnement de façon à obtenir des seconds membres égaux à 100 à quelques millièmes près.

On trouve ici

$$s_a = 0{,}325; \quad s_b = 0{,}110; \quad s_c = 0{,}110;$$
$$s_d = 0{,}113; \quad s_e = 0{,}145; \quad s_f = 0{,}053.$$

Deuxième stade : variation du potentiel le long des parallèles à l'axe. — Connaissant la charge des anneaux, on a, sans difficulté, le potentiel créé en un point quelconque (ρ, ζ) de l'espace.

On commence par considérer des points situés dans les plans des anneaux pour différentes valeurs de ρ, ce qui évite de calculer de nouvelles valeurs de ζ.

Puis on complète par des points situés dans divers plans parallèles à ceux des anneaux, en particulier dans l'espace compris entre le plan de symétrie et l'extrémité du cylindre.

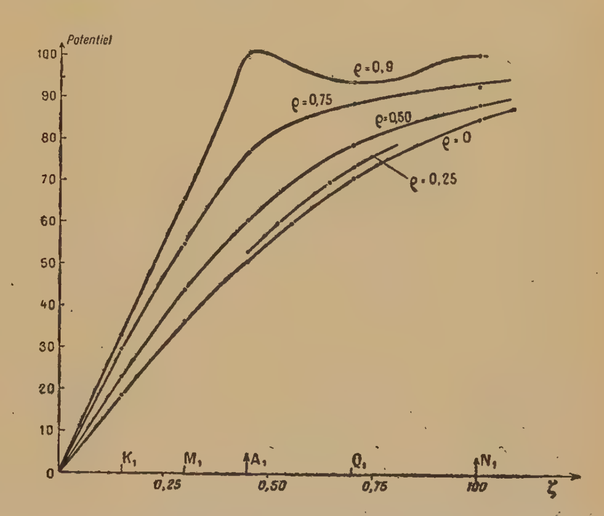


Fig. 6. — Potentiel d'une anode cylindrique, variation parallèlement à l'axe.

D'où les courbes de la figure 6.

Troisième stade : détermination graphique des méridiennes d'équipotentielles. — On coupe alors les courbes obtenues par des parallèles à l'axe des abscisses (potentiels constants) et l'on note les coordonnées des points d'intersection des courbes successives du réseau avec une même parallèle. Ce qui donne un tableau des courbes méridiennes des surfaces équipotentielles (*fig.* 8).

La précision obtenue est difficile à évaluer *a priori*. Mais elle semble être de l'ordre de 0,1 pour 100 au moins dans une région comprise entre l'axe et une distance à l'axe de $\frac{R}{3}$, les anneaux étant distants d'environ $\frac{R}{2}$, et le calcul étant supposé conduit avec une approximation suffisante. Dans le cas habituel d'emploi de courbes tracées sur papier millimétrique ordinaire et de la règle à calcul, la précision totale dans le domaine indiqué doit être de l'ordre de 2 pour 100.

En possession de la carte théorique approchée du potentiel, nous avons limité le modèle destiné à la cuve électrolytique par l'équipotentielle $U = 0{,}6$ (le potentiel étant pris égal à 1 sur l'électrode cylindrique et à 0 sur le plan du diaphragme).

Cette équipotentielle constituant une des électrodes de la maquette. La seconde électrode était formée par une pièce représentant le premier étage d'accélération du tube à neutrons réel. Quant au diaphragme, il constituait une troisième électrode. Le tracé des équipotentielles au moyen de la cuve électrolytique était effectué en appliquant les différences de potentiel suivantes : 30 V entre la première électrode et le diaphragme; 300 V entre le diaphragme et la seconde électrode (lentille d'accélération). On pouvait ainsi mettre en évidence l'influence du canal de sortie des ions sur la répartition du potentiel dans son voisinage, sur les deux faces de la paroi qu'il traverse.

En possession de la carte des équipotentielles, nous en avons tiré la courbe de variation du potentiel le long de l'axe.

Pour faire la comparaison avec la courbe $U = f(z)$ obtenue théoriquement, nous avons remplacé cette dernière par la courbe complémentaire $V = 1 - U$, en prenant comme origine des abscisses l'équipotentielle frontière, et en modifiant l'échelle des ordonnées de telle sorte que les extrémités des courbes théorique et expérimentale (limitées à la face interne du diaphragme) coïncident.

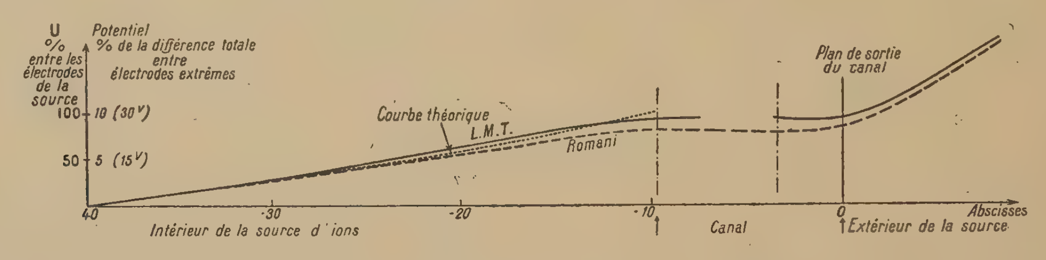


Fig. 7. — Comparaison entre les courbes expérimentales L. M. T. et E. N. S. (Romani) et la courbe théorique (R. Duchon).

La figure 7 montre les trois courbes juxtaposées. Les courbes expérimentales encadrent la courbe théorique. La vérification du calcul est donc satisfaisante.

Les courbes expérimentales présentent, il est vrai, un aplatissement au voisinage du plan du diaphragme. Mais c'est là, précisément, la perturbation, que nous voulions déterminer, apportée par le canal de sortie des ions.

L'allure des rayons ioniques n'en est pas sensiblement modifiée.

Pour tracer les rayons en question, nous avons utilisé simultanément la méthode du polygone inscrit, et une autre, nouvelle, due à Bruck et Romani [4].

Cette dernière consiste à découper l'espace en tranches par des plans perpendiculaires à l'axe de révolution, de façon que le potentiel axial à l'intérieur de chacune d'elles puisse être considéré comme linéaire. Soit AB la portion de rayon ionique compris dans la tranche.

Si r est la distance de la particule électrique à l'axe, on prend comme variable auxiliaire

$$R = rU^{\frac{1}{4}}.$$

On s'appuie sur la relation

$$R'' = fRh,$$

où h est la différence des abscisses des points A et B, et f un coefficient constant à l'intérieur de AB et défini par

$$f = -\frac{3}{16}\left(\frac{U'}{U}\right)^2.$$

U' est la dérivée en z du potentiel dans l'intervalle AB

$$\left(U' = \frac{U_B - U_A}{h}\right).$$

U est le potentiel au point A.

Le théorème des accroissements finis donne, pour chaque portion de rayon analogue à AB :

$$\Delta R' = R''h = fRh,$$
$$\Delta R = R'h.$$

Partant des valeurs initiales R_0 et R'_0, on a

$$R'_1 = R'_0 + \Delta R'_0 = R'_0 + f_0 R_0 h_0,$$
$$R_1 = R'_0 h_0;$$
$$R'_2 = R_1 + \Delta R'_1 = R'_0 + \Delta R'_0 + \Delta R'_1,$$
$$R_2 = R'_1 h_1 = (R'_0 + \Delta R'_0) h_1;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Le tableau ci-contre donne les résultats des deux modes de calcul pour un rayon partant du point d'abscisse $z_0 = 1{,}05$ et d'ordonnée $r_0 = 1$. (Les abscisses sont rapportées aux rayons $R = 52$ mm du cylindre.)

La figure 8 montre que les rayons corpusculaires, qui traversent l'ouverture du diaphragme, ne sont pas très nombreux. Le rendement n'est certai-

TABLEAU IV.

Abscisse..........	1,05.	0,90.	0,75.	0,60.	0,45.	0,30.	0,15.	0,00.
Polygone inscrit.....	1,00	0,929	0,842	0,746	0,652	0,565	0,484	0,407
Bruck-Romani.......	1,00	0,927	0,845	0,741	0,655	0,570	0,491	0,421

nement pas bon, même si l'on tient compte de l'entraînement mécanique des ions produits par le filet de gaz traversant le canal.

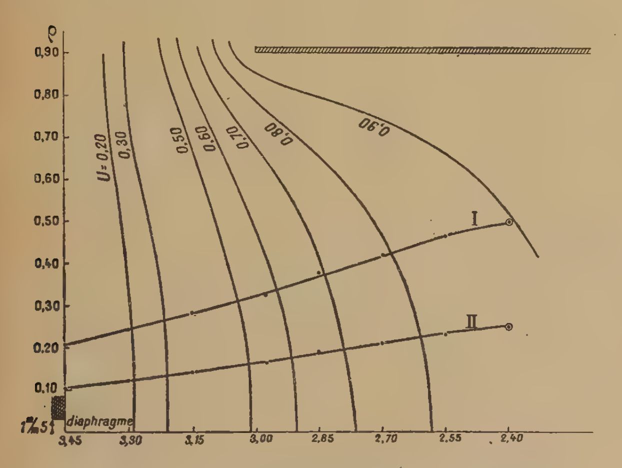


Fig. 8. — Trajectoire d'un ion dans la source d'ions. (Polygone inscrit.)

Il est possible qu'on parvienne à remédier à ce défaut par des modifications bien étudiées de la forme des électrodes. Ces modifications devront faire l'objet d'études théoriques très soignées.

En particulier, la substitution d'une anode conique à l'anode cylindrique permettrait probablement d'améliorer le rendement en rapprochant les lignes de force de l'axe.

Nous avons donc résolu, dans cette étude, deux problèmes différents relatifs à la concentration de faisceaux d'ions dans les systèmes électrostatiques de révolution.

Le premier faisait intervenir les propriétés des lentilles électrostatiques. Pour le résoudre, nous avons fait appel, d'une part, à la théorie, aujourd'hui classique, de ces systèmes; d'autre part, à la méthode d'analogie électrique, couramment appliquée maintenant dans divers laboratoires.

Le second problème concernait la concentration et la focalisation des ions dans une source à décharge

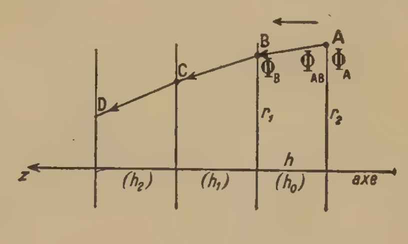


Fig. 9.

particulière. Nous avons utilisé, pour sa résolution, la méthode de calcul théorique dite « des anneaux », dont l'idée première revient à M. Max Morand, et dont la mise au point est récente. Les résultats des calculs, confrontés avec l'expérience, ont montré que l'approximation obtenue était satisfaisante.

Ce travail a été exécuté au Laboratoire de Synthèse atomique d'Ivry. Le Sous-Directeur de ce laboratoire, M. Jean Surugue, a bien voulu nous guider de ses conseils et nous donner de précieux encouragements; nous lui demandons de trouver ici l'expression de notre amicale gratitude.

Les cartes de potentiel que nous avons employées ont été relevées au Laboratoire d'Analogie électrique de l'E. N. S. de M. le Professeur Pérès, à qui nous exprimons notre reconnaissance. Nous adressons également nos remercîments à M. L. Romani et à ses collaborateurs, qui ont effectué les mesures et tracé les diagrammes correspondants.

Quelques courbes équipotentielles ont été déterminées avec la cuve électrolytique de la Société L. M. T. que nous remercions aussi de son obligeance.

Manuscrit reçu le 18 octobre 1945.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] J. PÉRÈS et M. MALAVARD. *Bull. Soc. Électr.*, août 1938, 8, p. 715-744.
[2] P. GRIVET, *R. G. E.*, novembre 1942, 51, n° 11, p. 473.
[3] R. DUCHON, *Cahiers de Physique*, déc. 1943, n° 18, p. 24.
[4] H. BRUCK et L. ROMANI, *Cahiers de Physique*, octobre 1944, n° 24, p. 16.

ÉTUDE DES CONSTANTES OPTIQUES D'UNE SURFACE RÉFLÉCHISSANTE DEMEURANT A L'INTÉRIEUR D'UNE ENCEINTE ÉTANCHE

Par F. WOLFERS et G. VUILLARD.

Laboratoire de Physique Générale de la Faculté des Sciences d'Alger.

Sommaire. — Description d'un dispositif expérimental et de la méthode permettant de déterminer l'indice de réfraction n et l'indice d'extinction k de la surface étudiée, qui reste dans le récipient étanche.

Nous avons conçu et réalisé un dispositif permettant de suivre l'évolution d'un faisceau de lumière monochromatique réfléchi par une surface plane polie, maintenue dans le vide et soumise à divers traitements durant l'observation même. Nous avons vérifié que la méthode est correcte et commode. Nous nous décidons à publier ces travaux préliminaires, interrompus en 1940, parce qu'il nous est impossible de les reprendre actuellement pour des raisons de matériel et de personnel.

1. Principe de la méthode. — Le but recherché est la détermination rapide des indices de réfraction n et d'extinction k d'une surface réfléchissante. Nous lui attribuons, suivant l'usage, un indice complexe $n' = n(1 - jk)$. Des mesures polarimétriques donnent la différence de phase φ introduite par la réflexion entre les composantes a'' et b'' de la lumière réfléchie, parallèle et perpendiculaire au plan d'incidence, ainsi que de l'azimut « de polarisation rétablie » ψ. Connaissant l'angle d'incidence i et les angles correspondants ψ et $\varphi' = \pi - \varphi$, on en tire n et k.

Pour faire ce calcul, nous utilisons un changement de variables qui permet d'obtenir les constantes optiques facilement et sans aucune approximation. On pose [1] :

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg} 2\psi \sin\varphi' &= \operatorname{tg} Q, \\ \sin 2\psi \cos\varphi' &= \cos 2P, \\ \sin i \operatorname{tg} i \operatorname{tg} P &= S \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

et l'on trouve

$$\left.\begin{aligned} 2n^2 k &= S^2 \sin 2Q, \\ n^2(1 - k^2) &= S^2 \cos 2Q + \sin^2 i. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Enfin, avec

$$\operatorname{tg}\theta = -\frac{S^2 \sin 2Q}{S^2 \cos 2Q + \sin^2 i},$$

il vient

$$k = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2} \qquad \text{et} \qquad n^2 = \frac{1}{2} S^2 \sin 2Q \operatorname{cotg}\frac{\theta}{2}. \qquad (3)$$

On obtient ainsi n et k avec trois décimales exactes, si φ, ψ et i sont mesurés à une minute d'arc près.

Il existe des conditions de réflexion particulièrement favorables à la détermination des constantes optiques. Pour un certain angle i_0 appelé *incidence principale*, dont la valeur dépend de la nature de la surface et de la longueur d'onde de la lumière incidente, la différence de phase φ a pour valeur $\frac{\pi}{2}$. En différentiant les équations (1) et la première des équations (2), on établit la relation

$$\frac{2\sin\varphi}{\cos^2 2\psi}\, d\psi + \operatorname{tg} 2\psi \cos\varphi\, d\varphi - \frac{1}{S^2} \operatorname{tg} Q \sin 2i\, di = 0. \quad (4)$$

Le facteur de $d\varphi$ s'y annule lorsque $\varphi = \frac{\pi}{2}$; ce qui montre qu'au voisinage de l'incidence principale $\left(P_0 = \frac{\pi}{4};\ Q_0 = 2\psi_0;\ S_0 = \sin i_0 . \operatorname{tg} i_0\right)$, la valeur de ψ varie infiniment peu en fonction de φ [2].

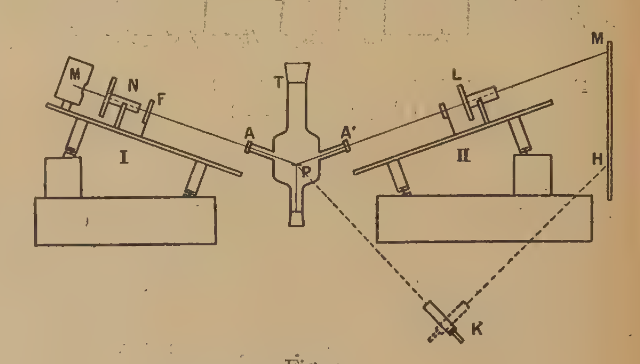


Fig. 1.
I et II, bancs d'optique; M, source monochromatique; N, polariseur, sur cercle divisé; F, quart-d'onde ou prisme de Fresnel; A, A', bras latéraux et disques rodés; P lame réfléchissante à étudier; T, tube à vide (*fig.* 2); L, ensemble analyseur; K, cathétomètre; MH, mire.

On a coutume de faire les mesures en choisissant, pour i, l'angle d'incidence principale; mais, dans le cas qui nous occupe, il n'est guère commode de faire varier i. En tenant compte du fait que i_0 est généralement assez voisin de 70° en lumière jaune, nous avons décidé d'imposer à i une valeur fixe : 70° environ. D'ailleurs, la dispersion des valeurs de i_0 peut permettre de choisir la radiation utilisée de

(1) DRUDE, *Traité d'Optique*.

(2) On trouve encore $\left(\frac{\partial\psi}{\partial i}\right)_0 = \sin 4\psi_0 \cos i_0 \operatorname{cotg} i_0$, ce qui fournit des valeurs dépassant rarement 0,1 et, en général, très petites.

façon à ramener toujours i_0 au voisinage de cette valeur; et, du reste, un écart, même notable, entre i et i_0, est de peu d'importance ici.

D'autre part, remarquons qu'on peut, au lieu de prendre, comme d'habitude, de la lumière incidente rectiligne polarisée à 45° du plan d'incidence, se donner cette lumière telle que la lumière *réfléchie* soit *à peu près* rectiligne et d'orientation fixe. Il en serait *exactement* ainsi pour $i = i_0$, avec de la lumière incidente circulaire. Si i reste assez peu différent de i_0, la lumière réfléchie sera très faiblement elliptique; on pourra donc déterminer séparément son orientation et son ellipticité par les méthodes de polarimétrie classiques, comme pour l'étude du dichroïsme circulaire par exemple.

En définitive, notre montage comprend (*fig.* 1) : 1° un banc d'optique (I), incliné de 20° environ sur l'horizon; il porte une source de lumière monochromatique, un polariseur monté sur un cercle gradué, suivi d'une lame quart-d'onde ou d'un prisme de Fresnel fixes; 2° la lame réfléchissante P, dans son tube étanche T; 3° un autre banc (II), d'inclinaison réglable voisine aussi de 20°, et qui porte le dispositif de mesure de l'ellipticité suivi de l'analyseur. La lame reçoit ainsi de la lumière elliptique d'axes fixes, dont l'ellipticité $\frac{a}{b}$ est déterminée par l'orientation du polariseur. L'analyseur reste *fixe* à 45° du plan d'incidence. Si alors $i = i_0$, le champ de l'analyseur est obscur. Si $i \neq i_0$, on rétablit au mieux l'extinction en tournant le polariseur d'un angle α :

$$\frac{b}{a} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \operatorname{tg}\psi;$$

puis on mesure l'ellipticité ε de la vibration réfléchie, « rétablie » à 45° ($a'' = b''$), ce qui donne

$$\varphi' = \frac{\pi}{2} + 2\varepsilon.$$

2. **Réalisation.** — Le *tube à vide* (*fig.* 2) comprend une ampoule en Pyrex, portant deux bras latéraux obliques qui permettent d'observer la lame réfléchissante P sous un angle d'incidence fixe voisin de 70°. Ces bras A et A′ sont des tubes cylindriques de 2 cm de diamètre environ; ils sont fermés de l'extérieur grâce à un rodage sur lequel on mastique deux disques de verre (non trempé) à faces parallèles l et l'. La lame est supportée par une tige filetée t, vissée sur un cône de laiton que l'on scelle à la piscéine sur le rodage inférieur qui termine le tube à vide.

Le tube est monté sur un support qui permet de le déplacer et de le faire tourner très progressivement. On peut donc mettre en place la lame réfléchissante de façon qu'elle reçoive par A le faisceau incident, sous l'incidence i choisie, et le renvoie par A′.

Pour réaliser et mesurer i, on peut se servir d'un miroir auxiliaire supporté par un trépied réglable, que l'on place au point P en l'absence du tube T. Le miroir étant exactement horizontal, on amène le faisceau réfléchi à passer par un point de repère éloigné M, en agissant sur la pente du banc (I).

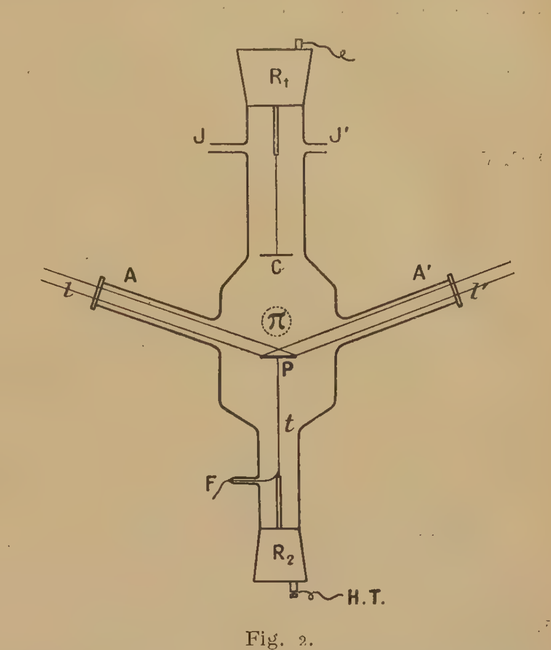


Fig. 2.
R_1, R_2, rodages et bouchons; π, orifice communiquant avec la pompe à vide; F, ..., divers passages de fils conducteurs permettant le chauffage de la lame P, le dégazage, etc.; J, J′, ... ajutages permettant le balayage, l'introduction de gaz, etc.; l, l', lames à faces parallèles, rodées et cimentées; t, tige filetée supportant la lame P à étudier.

Le point M est déterminé sur une mire verticale (*fig.* 1) suffisamment loin du miroir pour que l'erreur due à une petite translation du point P soit négligeable. On note d'autre part, sur la mire, le point H situé à la même hauteur que P. La mesure des distances PH et MH permet de calculer l'angle i_1 :

$$\operatorname{tg} i_1 = \frac{PH}{MH}.$$

Ce réglage étant fait une fois pour toutes, on substitue au miroir de référence le tube T contenant la lame à étudier. On amène celle-ci à la place que vient de quitter le miroir, ce qu'on vérifie au cathétomètre. En faisant ensuite tourner l'ensemble du tube T, on arrive à faire passer l'axe du faisceau réfléchi par un point M′ voisin de M. L'angle d'incidence exact est maintenant donné par la formule

$$\operatorname{tg} i = 2\,\frac{PH}{(MH + M'H)}.$$

L'appareil que nous avons monté présente peu d'intérêt quant à la détermination absolue des constantes optiques. Nous n'avons fait que vérifier le parfait accord de nos résultats avec des valeurs déjà connues de n et de k.

Mais il s'agissait surtout de suivre les variations avec le temps de n et k, déduites des variations observées de φ et de ψ; ne disposant comme analyseur que d'un simple Nicol précédé d'un Babinet de qualité fort médiocre, l'un de nous (3) a pu suivre, par exemple, l'altération rapide de lames de cuivre fraîchement préparées. Le réglage de l'inclinaison des bancs et de la position du tube à vide étant terminé, l'angle d'incidence i reste fixe. Les mesures des variations de φ et ψ sont commodes et rapides. Les variations des indices n et k sont connues avec une précision qui ne dépend guère que des accessoires polarimétriques employés. Le montage décrit, après quelques perfectionnements, semble parfaitement adapté à ce genre d'études.

(3) G. Vuillard, *Diplôme d'Études supérieures*, Alger, 1939.

Manuscrit reçu le 23 octobre 1945.

DIFFRACTION ET PERTURBATION CRÉÉE DANS UN GUIDE D'ONDES PAR UNE ONDE ÉLECTROMAGNÉTIQUE

Par T. KAHAN.

Sommaire. — On calcule, sous forme de série, le champ électrique créé, à l'intérieur d'un guide d'ondes, par une onde électromagnétique incidente. On indique aussi l'expression, également sous forme de série, du champ diffracté par le même guide.

Je me propose d'évaluer dans cet article la perturbation causée dans un guide d'onde par une onde électromagnétique d'origine externe.

Soient Oz l'axe du guide d'onde (tube métallique) de section circulaire, $r = R_e$ l'équation de sa surface extérieure (*fig.* 1), $r = R_i$ celle de sa surface interne.

Onde incidende
$\exp(j\sigma_0 x)$
Milieu 2
Milieu 3
R_e
R_i
Milieu 1
Onde diffractée

Fig. 1.

Supposons qu'il soit frappé par une onde plane

$$\exp j\sigma_0 x \qquad \left(\sigma_0 = \frac{2\pi}{\lambda} \text{ nombre d'ondes}\right), \tag{1}$$

dont l'expression en coordonnées cylindriques est (série de Fourier généralisée) :

$$\exp j\sigma_0 x = \sum_{m=-\infty}^{\infty} [j^m J_m(\sigma_0 r)\exp(jm\varphi)]. \tag{1bis}$$

Admettons encore que le champ électrique $E = E_z$ soit parallèle à l'axe du guide. L'onde diffractée et l'onde absorbée par le guide seront alors elles aussi polarisées dans le même sens. Écrivons

$$E_z = E\exp(-i\omega t),$$

et posons à titre d'essai les solutions :

Milieu 1 :

$$E_1 = \exp(j\sigma_0 x) + \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m H_m(\sigma_0 r)\exp(jm\varphi) \tag{2}$$

pour $r > R_e$.

Le premier terme du second membre représente l'onde plane incidente, le second terme (série infini) est l'onde diffractée.

Milieu 2 (paroi du guide) :

$$E_2 = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} [b_m J_m(\sigma r) + c_m N_m(\sigma r)]\exp(mj\varphi) \tag{3}$$

pour $R_e > r > R_i$,

où

$$\sigma = \sqrt{j\omega\mu(g + j\omega\varepsilon)},$$

g étant la conductivité de la paroi, μ sa perméabilité et ε son pouvoir diélectrique.

Milieu 3 (intérieur du guide) :

$$E_3 = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} d_m J_m(\sigma_0 r)\exp(jm\varphi) \tag{4}$$

pour $r < R_i$.

H_m est la fonction d'Hankel de première espèce d'ordre m. Le fait qu'elle est seule utilisée correspond à la condition que l'onde diffractée se propage vers l'infini du milieu 1. Dans le milieu 2, paroi métallique du guide, l'on a affaire à la fois aux fonctions de Bessel de première espèce J_m et aux fonctions de

Neumann N_m, car la ligne $r = 0$ n'est pas dans ce milieu 2. Enfin, dans l'intérieur du guide, milieu 3, seules les fonctions J_m figurent dans E_3 parce que les fonctions N_m deviennent infinies pour $r = 0$.

Les conditions aux limites (continuité de E_z et de H_z) ont ici pour expressions

$$E_1 = E_2, \qquad \frac{\partial E_1}{\partial r} = \frac{1}{\mu}\frac{\partial E_2}{\partial r} \qquad \text{pour } r = R_e, \tag{5}$$

$$E_2 = E_3, \qquad \frac{\partial E_2}{\partial r} = \frac{1}{\mu}\frac{\partial E_3}{\partial r} \qquad \text{pour } r = R_i. \tag{6}$$

Portons maintenant dans (2) le développement en série (1bis). Il résulte alors par identification terme à terme des deux membres de (5) et de (6)

$$j^m J_m(\sigma_0 R_e) + a_m H_m(\sigma_0 R_e) = b_m J_m(\sigma R_e) + c_m N_m(\sigma R_e), \tag{7}$$

$$\sigma_0 j^m J'_m(\sigma_0 R_e) + a_m \sigma_0 H'_m(\sigma_0 R_e) = b_m \sigma J'_m(\sigma R_e) + c_m \sigma N'_m(\sigma R_e), \tag{8}$$

$$b_m J_m(\sigma R_i) + c_m N_m(\sigma R_i) = d_m J_m(\sigma_0 R_i), \tag{9}$$

$$b_m \sigma J'_m(\sigma R_i) + c_m \sigma N'_m(\sigma R_i) = d_m \sigma_0 J'_m(\sigma_0 R_i), \tag{10}$$

ou, en regroupant les divers termes

$$a_m H_m(\sigma_0 R_e) - b_m J_m(\sigma R_e) - c_m N_m(\sigma R_e) + j^m J_m(\sigma_0 R_e) = 0,$$

$$a_m \sigma_0 H'_m(\sigma_0 R_e) - b_m \sigma J'_m(\sigma R_e) - c_m \sigma N'_m(\sigma R_e) + \sigma_0 j^m J'_m(\sigma_0 R_e) = 0,$$

$$b_m J_m(\sigma R_i) + c_m N_m(\sigma R_i) - d_m J_m(\sigma_0 R_i) = 0,$$

$$b_m \sigma J'_m(\sigma R_i) + c_m \sigma N'_m(\sigma R_i) - d_m \sigma_0 J'_m(\sigma_0 R_i) = 0.$$

C'est là un système d'équations linéaires qu'on peut résoudre par rapport aux d_m

$$d_m = \frac{\begin{vmatrix} H_m(\sigma_0 R_e) & -J_m(\sigma R_e) & -N_m(\sigma R_e) & -j^m J_m(\sigma_0 R_e) \\ \sigma_0 H'_m(\sigma_0 R_e) & -\sigma J'_m(\sigma R_e) & -\sigma N'_m(\sigma R_e) & -\sigma_0 j^m J'_m(\sigma_0 R_e) \\ 0 & J_m(\sigma R_i) & N_m(\sigma R_i) & 0 \\ 0 & \sigma J'_m(\sigma R_i) & \sigma N'_m(\sigma R_i) & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} H_m(\sigma_0 R_e) & -J_m(\sigma R_e) & -N_m(\sigma R_e) & 0 \\ \sigma_0 H'_m(\sigma R_e) & -\sigma J'_m(\sigma R_e) & -\sigma N_m(\sigma R_e) & 0 \\ 0 & J_m(\sigma R_i) & N_m(\sigma R_i) & -J_m(\sigma_0 R_i) \\ 0 & \sigma J'_m(\sigma R_i) & \sigma N'_m(\sigma R_i) & -\sigma_0 J'_m(\sigma_0 R_i) \end{vmatrix}}.$$

Les valeurs des d_m ainsi calculées portées dans (4) permettent d'évaluer la série définissant l'amplitude de l'onde pénétrante E_z.

L'intensité de perturbation sera alors par définition

$$\log_e \frac{E_1}{E_3} \quad \text{népers.}$$

Reste à étudier la convergence de la série (4) en d_m. De par la nature même du problème en question, il est à présumer que pour le calcul numérique, un petit nombre de termes suffira.

L'onde diffractée par le guide d'ondes aura comme coefficient de Fourier

$$a_m = \frac{\begin{vmatrix} -j^m J_m(\sigma_0 R_e) & -J_m(\sigma R_e) & -N_m(\sigma R_e) & 0 \\ -\sigma_0 j^m J'_m(\sigma_0 R_e) & -\sigma J'_m(\sigma R_e) & -\sigma N'_m(\sigma R_e) & 0 \\ 0 & J_m(\sigma R_i) & N_m(\sigma R_i) & -J_m(\sigma_0 R_i) \\ 0 & \sigma J'_m(\sigma R_i) & \sigma N'_m(\sigma R_i) & -\sigma_0 J'_m(\sigma_0 R_i) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} H_m(\sigma_0 R_e) & -J_m(\sigma R_e) & -N_m(\sigma R_e) & 0 \\ \sigma_0 H_m(\sigma_0 R_e) & -\sigma J'_m(\sigma R_e) & -\sigma N'_m(\sigma R_e) & 0 \\ 0 & J_m(\sigma R_i) & N_m(\sigma R_i) & -J_m(\sigma_0 R_i) \\ 0 & \sigma J'_m(\sigma R_i) & \sigma N'_m(\sigma R_i) & -\sigma_0 J'_m(\sigma_0 R_i) \end{vmatrix}}.$$

Le cas de polarisation inverse défini par

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_z = H \exp(j\omega t)$$

parallèle à l'axe du guide se traite, toutes choses égales d'ailleurs, par la même méthode.

Manuscrit reçu le 15 octobre 1945.

DISTRIBUTION ANGULAIRE DES GRANDES GERBES D'AUGER

Par J. DAUDIN.

Laboratoire de l'École Normale Supérieure. Paris.

Sommaire. — Les compteurs, quelle que soit leur disposition, sont incapables de sélectionner les gerbes de l'air suivant leur orientation. La chambre de Wilson est nécessaire à cette étude. Les travaux poursuivis en 1943 au Lautaret, ont permis de rassembler un nombre notable de clichés de gerbes d'Auger. Ces clichés sont utilisés pour l'étude de la répartition angulaire des gerbes par rapport à la verticale.

1. **Dépouillement des résultats.** — Les clichés utilisés dans cette étude ont été obtenus au cours d'une mission dirigée par M. Leprince-Ringuet, au Lautaret à environ 2000 m d'altitude. Le système expérimental est décrit dans les articles notés [1] et [2] dans la bibliographie ci-jointe, il consistait en une chambre de Wilson verticale commandée par des compteurs éloignés, de façon à enregistrer des trajectoires appartenant à des grandes gerbes de l'atmosphère.

Lorsque sur un cliché un certain nombre de trajectoires sont parallèles, on peut en inférer que la gerbe a la même direction générale. Pour que cette conclusion soit juste, il faut exiger un nombre minimum de trajectoires parallèles. En effet :

Deux trajectoires peuvent être fortuitement parallèles; c'est impossible pour un nombre plus élevé. En outre certaines gerbes secondaires peuvent être produites dans le toit de bois. Ces gerbes secondaires présentent parfois des pinceaux très divergents. Lorsqu'un tel pinceau venant de quelques mètres traverse la chambre, les trajectoires y apparaissent comme pratiquement parallèles bien que la direction du pinceau ne soit pas celle de la gerbe en général. Ainsi s'explique sans doute l'existence de quelques clichés où les trajectoires présentent deux directions moyennes très différentes. Un tel accident sera d'autant plus rare que l'on exigera un nombre plus grand de trajectoires parallèles. Enfin lorsqu'on exige un nombre minimum de trajectoires sur le cliché, on choisit des gerbes relativement denses et l'on n'a pas à discuter l'effet (sans doute très minime) de la sélection par les compteurs.

On a donc considéré que les groupes de quatre trajectoires parallèles et plus, définissaient la direction de la gerbe même si ces trajectoires étaient associées à d'autres trajectoires plus ou moins divergentes. Les trajectoires gerbigènes (électrons ou photons) étant de grande énergie moyenne ont un poids plus élevé et comptent pour plus d'une trajectoire ordinaire (de 1 à 3 suivant l'ampleur de la gerbe secondaire produite dans l'écran de plomb médian).

Les angles mesurés ne sont pas les inclinaisons vraies θ sur la verticale mais les projections α de ces angles sur le plan de la chambre. En général les répartitions de ces deux angles sont très voisines. Plus explicitement si la fréquence d'une direction θ dans l'angle solide $d\Omega$ est de la forme $\cos^n\theta . d\Omega$, la fréquence de la projection α est de la forme $\cos^n\alpha . d\alpha$. En fait la répartition observée est suffisamment voisine d'une répartition en $\cos^n\alpha$ pour que l'on puisse considérer à la précision des statistiques, les fonctions de fréquence pour θ et α comme identiques. La lecture des angles projetés α se fait à 2° près en général; cette erreur est sans aucune importance en face des erreurs statistiques.

2. **Statistiques.** — Deux statistiques ont été dressées, l'une à partir des expériences A (compteurs sans plomb), l'autre à partir des expériences B (compteurs couverts de 4 et, le plus souvent, de 8 cm de plomb). Les résultats sont consignés au Tableau I.

Tableau I.

Angles		0°.	5°.	10°.	15°.	20°.	25°.	30°.	40°.
Nombre de gerbes	A..	13	17	12	14	8	7	8	2
	B..	19	15	17	23	16	10	7	3

L'allure des deux statistiques est très semblable. En particulier aucune des deux ne comporte de gerbe plus inclinée que 45° sur la verticale. Néanmoins les inclinaisons moyennes de 15 à 25° sont mieux représentées dans la statistique des gerbes « pénétrantes ». Il faut ajouter en ce qui concerne ces dernières qu'à partir des angles de 30° elles

traversent l'écran de plomb protégeant les compteurs assez obliquement pour que l'épaisseur de plomb traversée croisse notablement au-dessus des valeurs minimes de 4 et 8 cm. Cet effet peut « couper » quelque peu la statistique B pour les grands angles.

Cette discussion ne comporte aucune solution puisque les chiffres sont trop petits : les écarts peuvent être fortuits. Il se peut néanmoins que les gerbes « pénétrantes » aient une répartition azimuthale quelque peu plus étalée : ou bien les gerbes d'Auger « pénétrantes » sont d'une nature spéciale, ou bien (et pour diverses raisons on peut le considérer comme plus probable [2] les gerbes ou portions de gerbes comprennent une proportion de particules pénétrantes variable, par exemple avec le lieu dans la gerbe ou avec l'âge de la gerbe.

On se contentera d'attribuer à la première statistique A (compteurs nus) un poids plus grand qu'à la seconde.

3. **Correction de surface.** — Les conditions expérimentales faussent néanmoins quelque peu les statistiques pour la raison suivante : exiger quatre trajectoires parallèles pour les gerbes verticales est beaucoup plus sévère que d'en exiger le même nombre pour les gerbes inclinées. En effet la surface de la chambre est de 70 cm² environ pour la direction verticale, de 140 cm² environ pour la direction à 45° située dans le plan de la chambre, de 400 cm² pour la direction à 45° située dans le plan de profit. On doit donc être moins exigeant pour le nombre minimum de trajectoires parallèles lorsqu'elles sont voisines de la verticale. La correction n'est intéressante à notre point de vue (au point de vue de l'angle projeté α) que dans le plan de la chambre. On a donc divisé les statistiques suivant la longueur des trajectoires projetée dans la chambre (angle avec le plan de la chambre) et pour chaque tranche on a abaissé régulièrement le maximum lorsque α diminue, suivant des considérations purement géométriques.

Cette correction tend à relever assez sensiblement le maximum central de la statistique. Elle ne saurait heureusement être considérée comme trop arbitraire. Lorsqu'elle a été effectuée on obtient les statistiques suivantes Tableau II.

Tableau II.

Angles......		0°.	5°.	10°.	15°.	20°.	25°.	30°.	40°.
Nombre de gerbes	A..	19	24	18	17	9	8	8	2
	B..	30	21	21	27	19	11	8	3

4. **Transformation de Grosz.** — Pluvinage [3] a appliqué la transformation de Grosz aux grandes gerbes de l'air. Bien qu'il ait utilisé la notion inexacte de densité moyenne, le principe de son calcul reste exact. Si $N(x)$ est le nombre de grandes gerbes enregistré au niveau x dans l'atmosphère et $n(x)$ le nombre des gerbes qui seraient observées si elles étaient toutes verticales, on a la relation suivante :

$$n(x) = N(x) - x\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}x}.$$

Pour l'inclinaison θ, des gerbes comprises dans l'angle solide de Ω ont traversé en réalité $\frac{x}{\cos\theta}$; le nombre de gerbes enregistrées sous cet angle est évidemment

$$\mathrm{d}N = \frac{\mathrm{d}\Omega}{2\pi}\, n\left(\frac{x}{\cos\theta}\right).$$

La fonction $n\left(\frac{x}{\cos\theta}\right)$ étant peu différente d'une fonction $\cos^n\theta\,(n \neq 7{,}5)$ la fonction de répartition suivant l'angle projeté α est d'après le paragraphe 2 voisine de

$$n\left(\frac{x}{\cos\alpha}\right) \quad \text{à un facteur près.}$$

Pour connaître $n(x)$ il faut connaître $\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}n}$. L'absorption des grandes gerbes est bien exponentielle et de la forme $N = e^{\alpha x}$

$$n\left(\frac{x}{\cos\alpha}\right) = e^{\frac{\mu x}{\cos\alpha}}\left(1 - \frac{\mu x}{\cos\alpha}\right).$$

L'absorption logarithmique des coïncidences doubles ou triples est environ — 0,10 cm⁻¹ de Hg (Hilberry, Cosyns, Daudin). Ici il ne s'agit pas des gerbes enregistrées par les compteurs, mais de gerbes comportant plus de trois ou quatre trajectoires dans la chambre. Les gerbes décroissent d'autant plus vite qu'elles sont plus denses (c'est ce qu'indique la croissance de l'indice γ avec l'écran atmosphérique), aussi faut-il calculer le coefficient d'absorption μ pour des gerbes comportant plus de deux à cinq trajectoires en moyenne par compteur. Cela est aisé par la méthode développée en A connaissant l'absorption des coïncidences doubles. On trouve que les gerbes de plus de cinq trajectoires ont un coefficient de — 0,135 cm⁻¹ de Hg, les gerbes de plus d'une trajectoire un coefficient de — 0,12 cm⁻¹ de Hg.

Ainsi au niveau x le nombre de gerbes dont la direction se projette dans l'angle α, $\alpha + \mathrm{d}\alpha$ est

$$n\left(\frac{x}{\cos\alpha}\right)\mathrm{d}\alpha$$

où

$$n\left(\frac{x}{\cos\alpha}\right) = e^{\frac{\mu x}{\cos\alpha}}\left(1 - \frac{\mu x}{\cos\alpha}\right) \qquad -0{,}12 < \mu < -0{,}115\ \mathrm{cm^{-1}\,Hg}$$

(x en cm de Hg).

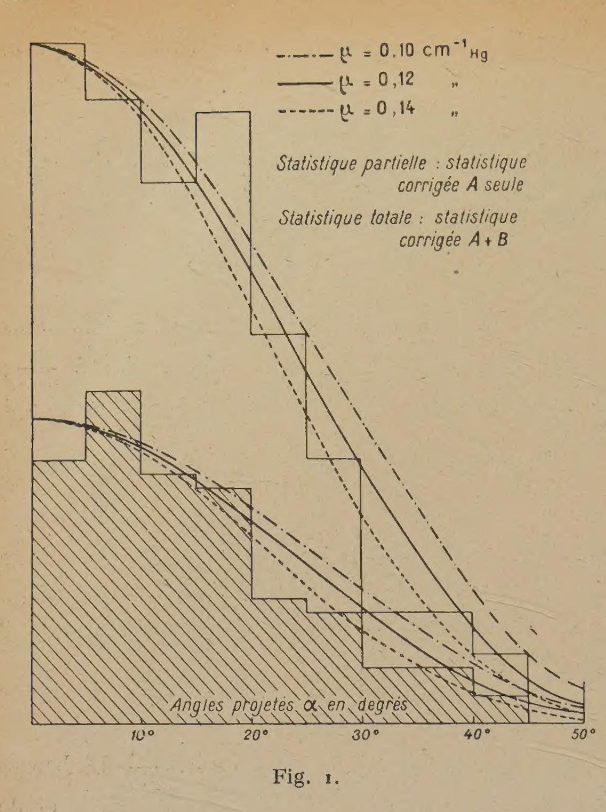


Fig. 1.

5. **Accord avec l'expérience.** — La figure 1 donne la comparaison entre le calcul et l'expérience.

La première courbe a trait à la première statistique seule A (compteurs nus). La deuxième a trait à l'ensemble des deux statistiques. L'indice μ est assez bien défini par l'extrémité de la courbe; il est de l'ordre de 13 pour 100 avec une précision de l'ordre de 2 pour 100.

On a ainsi la première indication sur l'orientation azimuthale des grandes gerbes : les gerbes comportant localement une densité moyenne supérieure à 100 ou 200 trajectoires au mètre carré se produisent avec l'inclinaison θ dans l'angle $d\Omega$ avec une fréquence proportionnelle à

$$\cos^n \theta \, d\Omega, \qquad 7{,}5 < n < 8.$$

Le calcul est une confirmation indirecte de la théorie A et surtout de la transformation de Grosz. Cette transformation suppose en effet que le rayonnement n'est absorbé que par la matière et non par le temps comme les mésons lesquels présentent une répartition azimuthale anormale.

Si des radioactivités analogues à celles du méson interviennent dans le développement des grandes gerbes de l'air, elles jouent un rôle beaucoup moins important que pour les mésons isolés. On est tout à fait fondé à considérer que le développement des grandes gerbes de l'air ne dépend que de la matière traversée, quels que soient les processus en jeu.

Manuscrit reçu le 6 octobre 1945.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] P. AUGER et J. DAUDIN, Les grandes gerbes de l'air, *J. de Phys.*, 1945, 6, p. 233.
[2] J. DAUDIN, Le rayonnement pénétrant et gerbigène dans les grandes gerbes de l'air (*Ann. de Physique*, à paraître).
[3] P. PLUVINAGE, *Dipl. Ét. sup., École Normale sup.*, Paris, 1940.